This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

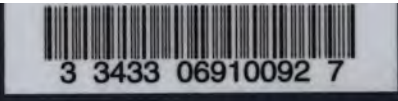
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


3 3433 06910092 7

ÉLÉMENS

DES

FORCES CENTRALES,

OU

OBSERVATIONS SUR LES LOIX
que ſuivent les Corps mûs autour
de leur centre de peſanteur ;

Suivies d'un jugement de l'Académie Royale des Sciences ſur pluſieurs de ces Obſervations, & d'un Examen critique de ce même jugement, à quoi on a joint un Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides, & quelques Obſervations ſur la nature des Courbes quarrables & rectifiables.

Par M. le Chevalier DE FORBIN.

ASTOR LIB
NEW-YOR

A PARIS,
Chez la Veuve DESAINT, Libraire,
rue du Foin Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilége du Roi.

PRÉFACE.

On s'eſt propoſé deux objets principaux, dans cet Ouvrage, qui ont déterminé à le rendre public. Le premier de développer les vrais principes des forces centrales, ou des loix que ſuivent les corps mûs autour de leur centre de peſanteur, en procédant méthodiquement & par les voies les plus ſimples & le plus à portée du commun des Géomètres. Le ſecond de manifeſter les erreurs dans leſquelles les plus grands Géomètres ſont tombés, & tombent même encore tous les jours, pour n'avoir pas toujours ſuivi la loi rigoureuſe qu'impoſe la Géométrie, dans la recherche de la vérité, de ne jamais fonder les démonſtrations qui de-

vroient l'établir que ſur les principes les plus clairs, & les plus évidens. Il n'eſt pas croyable à quel point l'on s'eſt égaré ici, pour avoir abandonné cette route, & combien d'erreurs, même groſſieres, ſont transformées en prétendues vérités mathématiques ? Les ouvrages de M. Newton, ſur-tout, fourmillent en ce genre, de transformation d'erreurs réelles en vérités apparentes. On eſt effrayé à la vue de cette multitude de cas que ce célèbre Géomètre a enviſagés, & de cette immenſe quantité de forces centripètes qu'il a fallu ſuppoſer pour les réſoudre. Mais ces forces ſont-elles auſſi réelles & auſſi poſſibles que M. Newton le ſuppoſe? Leur Auteur a-t-il démontré leur poſſibilité & leur réalité, avant que d'aſſigner le lieu de leur réſidence ? A-t-il prouvé que les effets, par leſquels il les repréſente, dûſſent véri-

tablement leur appartenir? Ces queſtions ſont faciles à réſoudre en ouvrant les ouvrages mêmes de M. Newton, où l'on ne voit pas qu'il ait jamais cherché à s'aſſurer ſi telles ou telles forces, ſuppoſées dans tels cas & dans telles circonſtances, étoient poſſibles, ou non. Et ſi les effets par leſquels il lui a plû de les repréſenter devoient véritablement leur être attribués. Par exemple, dans les courbes non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un point fixe, par le mouvement angulaire du rayon vecteur, à la maniere des courbes fermées & révolutives, M. Newton ne met ſeulement pas en queſtion s'il eſt poſſible ou non, que le mouvement angulaire, dont l'effet naturel eſt de ramener la courbe vers ſon axe, entre dans la génération de ces ſortes de courbes qui, par leur nature, s'écartent de leur axe à l'infini. Il ſuppoſe un fait ſi extraordinaire, &

en même-tems ſi nouveau en Géométrie, comme une maniere d'axiome de la vérité duquel il ne ſeroit pas permis de douter. Delà paſſant à une autre hypothèſe, il donne pour effet de la force centrale, ſuppoſée ici très-gratuitement, les petites lignes appellées *Fléches*, compriſes entre la tangente & la courbe, ſans prouver davantage qu'en effet ces petites lignes ſont véritablement des effets de la force centrale ſuppoſée, & expriment les eſpaces que cette force feroit parcourir, dans le tems préciſément où le rayon vecteur décriroit un tel angle. Voilà donc deux hypothèſes qui ſont le fondement de la preſque totalité de ce que M. Newton a écrit ſur les forces centrales, & de toutes les formules algébriques qui en dérivent. Or que prouveroient ces formules, & tous les argumens de M. Newton, ſi les deux hypothèſes qui leur ſervent de

baſe étoient démontrées fauſſes ? Mais, dit-on, pourquoi ces formules donnent-elles dans tel cas une ellipſe, dans tel autre cas une parabole, une hyperbole, &c. La raiſon en eſt bien ſimple. On a d'abord ſuppoſé poſſible la génération de toute eſpèce de courbes, fermées ou non fermées, autour d'un point. On a ſuppoſé enſuite que, dans toutes ces courbes, les petites lignes compriſes entre la courbe & la tangente, étoient la meſure de la force centrale, pendant le tems de la deſcription d'un très-petit arc de la courbe. Or, partant delà, il eſt facile de trouver une formule générale qui exprime la force centrale de toutes les courbes poſſibles, & en ſubſtituant, dans cette formule, ce qui eſt propre à chaque courbe en particulier, il eſt clair que l'on obtiendroit, par cette ſubſtitution, tantôt une ellipſe, tantôt une parabole, une hyperbole. . . . .

&c. ſans qu'on fût en droit d'en conclure qu'en effet la génération de toutes ces courbes, ainſi ſuppoſées décrites autour d'un ſeul & même point fixe, fût poſſible. Ces réſultats ne prouveroient autre choſe, ſinon que dans le cas où le mouvement angulaire entreroit effectivement dans la génération d'une courbe non rentrante en elle-même, & que dans le cas encore où les petites lignes, compriſes entre la tangente & la courbe, ſeroient véritablement les effets de la force centrale, conſidérés pendant le tems de la génération d'un très-petit arc de cette courbe; cette courbe dans tel cas ſeroit un cercle, une ellipſe, & dans tel autre cas une parabole, une hyperbole... &c. décrites par leur foyer, ou par tel autre point qui ſeroit donné. Il reſteroit donc toujours à prouver qu'en effet le mouvement angulaire peut entrer dans la génération

des courbes non fermées, & que les petites lignes compriſes entre la tangente & la courbe, ſeroient en effet, dans ce cas, la meſure de la force centrale, ou les effets par leſquels cette force pourroit être repréſentée. Mais ſi M. Newton, ni depuis lui aucun Géomètre, n'a prouvé la vérité de ces deux propoſitions, comme il eſt évident, ne s'enſuit-il pas qu'il n'y a rien de démontré dans tout ce qui a été écrit ſur les forces centrales, au ſujet de cette multitude de forces centripètes, par leſquelles on ſuppoſe que des courbes non rentrantes en elles-mêmes peuvent être décrites, & que les formules algébriques, & autres procédés mathématiques, dont on s'autoriſe pour en établir la réalité, ne prouvent rien, puiſqu'il reſte toujours à démontrer la vérité de deux propoſitions ſur leſquelles portent ces procédés & ces calculs, qui ne ſont établies que par

maniere de ſuppoſitions & de ſimples hypothèſes, & qui dès-là peuvent être fauſſes, & ne donner que des réſultats erronnés, dès que leur certitude n'eſt pas appuyée ſur une démonſtration rigoureuſe. Mais non-ſeulement la vérité de ces deux propoſitions n'eſt pas établie par la voie d'une démonſtration en forme, c'eſt qu'on démontre au contraire dans cet ouvrage de toutes les manieres poſſibles & les plus inconteſtables, qu'il eſt faux & abſurde que le mouvement angulaire, autour d'un ſeul & même point fixe, puiſſe jamais entrer dans la génération d'une courbe qui s'écarteroit à l'infini de ſon axe, telles que les courbes non rentrantes en elles-mêmes. Et en effet l'on doit ſentir que la propriété ſpéciale du mouvement angulaire étant de ramener la courbe vers ſon axe, il eſt abſurde de ſuppoſer que ce mouvement puiſſe entrer dans la généra-

tion des courbes qui, loin d'être ramenées vers leur axe, doivent, par leur nature, s'en écarter à l'infini. C'eſt-là une erreur intolérable en Géométrie, qui tend à confondre deux principes génératifs de courbure très-différents, & à détruire même l'un par l'autre; car en introduiſant dans la génération d'une courbe qui, par ſa nature, devroit s'écarter à l'infini de ſon axe, un principe contraire à ſa nature, tel que celui du mouvement angulaire qui la ramèneroit continuellement vers cet axe, il eſt évident que l'on détruit, en tout ou en partie, le mouvement eſſentiel à cette courbe, tendant à l'éloigner de ce même axe à l'infini, & que dès-là cette courbe, ainſi attaquée dans ſa nature, ne peut plus ſubſiſter. Nommons *M*, le mouvement eſſentiel à une courbe quelconque non fermée, tendant à l'éloigner de ſon

axe, dans une ſuite de moments t; d'une quantité R, requiſe par la nature même de cette courbe. Cette courbe, par l'hypothèſe, ne pourroit donc ſubſiſter qu'autant que le mouvement qui devroit l'écarter de ſon axe ſeroit M, & que la quantité dont elle s'éloigneroit de ce même axe dans un tems t, ſeroit R. Or cela poſé, il eſt clair qu'en introduiſant dans la génération de cette même courbe un mouvement N, contraire au mouvement M, dont l'effet ſeroit de ramener la courbe vers ſon axe, dans le même tems t, d'une quantité S; il en réſulteroit que ſon mouvement eſſentiel M, ſeroit altéré & ne ſeroit plus que $M-N$, & que la quantité dont elle devroit s'écarter de ſon axe, dans un tems t, ne ſeroit plus R, mais $R-S$. Donc cette courbe ne ſubſiſteroit plus, puiſque ſon mouvement eſſentiel M, ſeroit détruit en tout ou en

partie, n'étant plus M, mais $M-N$, & que la quantité R, dont elle devroit, par ſa nature, s'éloigner de ſon axe dans un tems t, ne ſeroit plus R, mais $R-S$, cela eſt évident. Voilà, par exemple, la parabole de Galilée, décrite par un corps dont les tendances ſeroient toujours paralèles entr'elles, ou, ce qui reviendroit au même, qui ne coïncideroient que vers un centre infiniment diſtant du corps. Il y aura donc un mouvement M, eſſentiel à cette courbe pour l'éloigner de ſon axe, dans un tems t, d'une quantité R, d'où réſultera la proportionnalité entre les abſciſſes ou les eſpaces parcourus, & les quarrés des tems ou des ordonnées, en quoi conſiſte préciſément le mouvement parabolique. Mais voilà M. Newton qui ſurvient, qui veut rencherir ſur les principes de Galilée, & obtenir préciſément la même courbe, en introduiſant,

1°, dans ſa génération ; le principe même de ſa deſtruction, c'eſt-à-dire, le mouvement angulaire dont l'effet ſeroit de ramener vers l'axe, une courbe qui, par ſa nature, doit s'en écarter à l'infini ; 2°, en accroiſſant infiniment la peſanteur du corps, & le faiſant circuler autour du premier foyer de la parabole, où ſa force centripète deviendroit finie, d'infiniment petite qu'elle étoit dans la parabole de Galilée, où le corps circuloit autour d'un centre infiniment éloigné. Altération eſſentielle dans la nature d'une courbe qui par-là ſe trouve néceſſairement transformée en une autre courbe ; car on ſait qu'une parabole ſe transforme en une ellipſe par la ſeule ſubſtitution d'un axe fini à un axe infini, que par conſéquent elle doit ſubir la même transformation, l'effet devant être le même, par la ſubſtitution d'une force centripète finie à une force centripète

infiniment petite. Que dire de ce moyen d'obtenir une courbe, en introduiſant dans ſa génération le principe même de ſa deſtruction, & celui de ſa transformation en une autre courbe? Le mouvement angulaire eſt, par ſa nature, deſtructif de tout mouvement qui tendroit à écarter à l'infini une courbe de ſon axe. Donc ce mouvement ne peut être introduit dans la génération des courbes de cette eſpèce, & leur nature y réſiſte invinciblement.

L'Académie Royale des Sciences, à qui la plupart des Obſervations qui ſont l'objet de cet ouvrage, ont été communiquées, & ſur leſquelles ſon jugement a été pluſieurs fois requis, même par l'autorité ſupérieure à laquelle on a été obligé de s'adreſſer pour la faire parler, s'eſt toujours décidée à renvoyer au Public le jugement de ce point de controverſe, ſous prétexte *qu'elle ne devoit*

pas s'occuper d'objections contre des propoſitions qu'elle regardoit comme démontrées. Les commiſſaires qu'elle a été obligé de nommer, quand les ordres du Roi lui en ont été notifiés, ont fait un rapport tel quel, dont il ſera parlé dans l'ouvrage, ainſi que d'un premier rapport qui avoit déja été fait au ſujet de la meſure réelle de la force centrale du cercle, ſur laquelle les Géomètres s'étoient partagés, les uns ayant prétendu que cette meſure devoit être le quarré de l'arc décrit diviſé par le diamètre, & d'autres le quarré de l'arc décrit diviſé par le rayon, ce qui faiſoit une différence de moitié dans la meſure de cette force. L'Auteur des préſentes obſervations ayant démontré de pluſieurs manieres, que la véritable meſure de cette force étoit le quarré de l'arc décrit, diviſé par le diamètre & non par le rayon, l'Académie qui n'a point vu, dans cette

cette première queſtion, d'*objections contre des propoſitions qu'elle regardât comme démontrées* a daigné *s'en occuper*, & l'a décidée en faveur de l'Auteur, ſans néanmoins vouloir lui accorder qu'il y eût erreur dans les procédés de ceux des Géomètres qui donnoient une autre meſure à cette force. Le Public verra dans l'ouvrage, les raiſons pour & contre cette opinion qui lui paroîtra, ſans doute, d'abord aſſez étrange. La vérité s'établit de deux manieres, ou par des propoſitions directes qui la prouvent inconteſtablement, ou par la manifeſtation des erreurs, ou paralogiſmes dans leſquels tombent néceſſairement ceux qui la nient. Les Géomètres font également uſage de ces deux moyens de prouver une vérité mathématique, & on ne voit pas pourquoi l'Académie qui compte parmi ſes Membres un ſi grand nombre de Géomètres, même du pre-

mier ordre, s'eſt interdit pendant ſi long-tems en cette occaſion, l'uſage de ce ſecond moyen de défendre la vérité attaquée dans des propoſitions qu'elle *regarde comme démontrées*. On verra encore moins les motifs qui ont pû la porter à réduire à la qualité de ſimples *objections* des démonſtrations rigoureuſes, miſes ſous la forme la plus géométrique, & à élever au rang de *propoſitions démontrées*, de ſimples hypothèſes dont les mêmes démonſtrations prouvent toute l'abſurdité. Le Public, que l'Académie a deſiré que l'Auteur prît pour juge en cette occurrence, ne manquera pas de demander où peuvent ſe trouver *ces propoſitions démontrées*, dont l'Académie annonce l'exiſtence, ſans indiquer les Auteurs où on peut les voir, où il ſoit effectivement prouvé inconteſtablement que le mouvement angulaire peut entrer dans la génération d'une

courbe non fermée qui s'écarteroit à l'infini de ſon axe. Si, en feuilletant tous les ouvrages des Géomètres, à commencer par le fameux Livre des Principes de M. Newton, on ne trouve point cette propoſition, comme il eſt évident, par le fait, qu'elle n'exiſte nulle part, qu'elle ne ſoit autoriſée par aucune eſpèce de démonſtration bonne ou mauvaiſe, que penſera le Public de cette propoſition, abandonnée à toute la foibleſſe de la plus ſimple des hypothèſes, & de l'aſſertion de l'Académie qui l'éleve au rang de *propoſition démontrée.*

Dès qu'on veut que le mouvement angulaire, autour d'un ſeul & même point fixe, entre dans la génération d'une courbe non fermée, au moins faudroit-il faire entrer quelqu'arc de cercle, meſure de ce mouvement pendant le tems donné, dans l'expreſſion de la force centrale, par la-

quelle on ſuppoſe que cette courbe peut être décrite, comme il arrive dans le cercle, où l'arc décrit, meſure du mouvement angulaire, pendant un tems donné, entre dans l'expreſſion de la force centrale de cette courbe. Voilà la manière de prouver, même par le fait, qu'en effet le mouvement angulaire peut entrer dans la génération d'une courbe non fermée, c'eſt en introduiſant la meſure de ce mouvement dans l'expreſſion même de la force centrale ſuppoſée; car de ſe borner, comme on fait, à exprimer cette force par quelque fonction des tangentes, des abſciſſes, ou ſinus verſes, des fléches, des rayons oſculateurs, ou des rayons vecteurs, c'eſt évidemment manquer le but qu'on ſe propoſoit, puiſque, quelle que puiſſe être la manière dont une courbe non rentrante en elle-même ſeroit ſuppoſée décrite, ſoit autour d'un ſeul & même point

fixe, ſoit d'une autre manière, cette courbe n'en auroit pas moins ſes tangentes, ſes abſciſſes, ſes fléches, ſes rayons vecteurs, ou oſculateurs.... &c. Par conſéquent aucune fonction de ces lignes ne pourroit prouver ſa génération, autour d'un point fixe, & l'on doit ſentir la néceſſité d'y introduire quelqu'arc de cercle, décrit autour du centre de peſanteur du corps, lorſqu'on voudra que le mouvement angulaire entre dans ſa génération. C'eſt par-là que l'on connoîtra exactement quelles ſont les courbes qui peuvent être décrites autour d'un ſeul & même point fixe; & celles qui ne peuvent pas l'être, en même tems que l'on ſimplifiera infiniment la théorie des loix des forces centrales, dont on a fait une ſcience immenſe, en l'enviſageant dans ſa généralité, & qui ſe réduit, dans le fait, à un ſeul théorème, & à la génération de deux courbes poſſibles, au

cercle décrit par ſon centre, & à l'ellipſe décrite par l'un de ſes foyers, comme on le démontre clairement dans ces Obſervations, où l'on verra encore, non ſans ſurpriſe, combien on a peu entendu juſqu'ici la matière des forces centrales, de laquelle néanmoins nos Géomètres Newtoniens ſe croyent très-inſtruits. Les Auteurs qui paroiſſent avoir ſeuls écrit exactement ſur cette partie importante des mathématiques, ſont Galilée & Hüyghens; tout ce qui eſt venu après, à commencer par M. Newton, dont les principes ont été aſſez généralement adoptés, paroît en général plus digne de cenſure que de louange, pour avoir obſcurci, par des ſubtilités, & des procédés peu exacts, les principes d'une ſcience fort ſimple en elle-même, dont ils ſont parvenus à faire une hydre, à force d'entaſſer hypothèſes ſur hypothèſes, ſubtilités ſur ſubtilités, & erreurs

ſur erreurs ; ce qui paroîtra encore manifeſte par les ſeuls paralogiſmes qui fourmillent dans le rapport des Commiſſaires de l'Académie, qui n'ont pû attaquer la vérité des quatre propoſitions, auxquelles cette controverſe a été réduite, ſans tomber eux-mêmes dans les erreurs, fauſſement imputées à ces mêmes propoſitions, ainſi qu'on le prouve clairement à la fin de cet Ouvrage, où on a renvoyé l'examen de ce rapport pour ne pas interrompre la chaîne des vérités, dont on a cru que cet examen devoit être précédé. De manière que les propoſitions controverſées ont le double avantage d'être prouvées, & par des démonſtrations directes qui en établiſſent clairement la vérité, & par les paralogiſmes dans leſquels on devoit néceſſairement tomber en attaquant leur certitude. En renvoyant ainſi à la fin de l'ouvrage les points controverſés,

on lui a conſervé la forme élémentaire, ſous laquelle il a été d'abord conçu, dans le deſſein de remplir les deſirs des Géomètres qui paroiſſent ſouhaiter depuis long-tems, un ouvrage purement élémentaire & propre à être mis entre les mains des Commençans, ſur cette partie importante des Mathématiques.

ÉLÉMENS
DES FORCES CENTRALES,
OU
OBSERVATIONS SUR LES LOIX que ſuivent les Corps mûs autour de leur centre de peſanteur ;

Suivies d'un jugement de l'Académie Royale des Sciences ſur pluſieurs de ces Obſervations ; & d'un Examen critique de ce même jugement, à quoi on a joint un Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides, & quelques Obſervations ſur la nature des Courbes quarrables & rectifiables.

DÉFINITIONS.

1. ON appelle en général *Force*, tout principe moteur dont il réſulte une action propre à mouvoir les corps.

2. *Obſtacle* ou *réſiſtance*, ce qui s'oppoſe à la force, en réſiſtant à ſon action.

3. On ne peut concevoir des forces ſans réſiſtances, ni des réſiſtances ſans forces.

4. L'effet d'une force ſera donc de vaincre un obſtacle, & l'effet de l'obſtacle de réſiſter à la force.

5. Si la force ſurmonte l'obſtacle du corps, ce corps ſera mû, ſi elle ne le ſurmonte pas, le corps perſiſtera dans ſon état de repos, & détruira la force.

6. D'où il ſuit que le mouvement d'un corps n'eſt autre choſe que l'effet de l'excès de la force qui lui ſera appliquée, ſur ſa réſiſtance.

7. L'obſtacle en réſiſtant à la force, détruit toujours dans elle la partie de la force qui ſeroit égale à la réſiſtance : enſorte qu'un obſtacle conſtant doit finir par détruire la force, à la fin d'un tems plus ou moins éloigné, à moins que l'obſtacle ne puiſſe être regardé comme nul, à l'égard de la force, ou, ce qui reviendroit au même, comme infiniment petit, & dès-lors il faudroit concevoir une force ſans réſiſtance, ce qui eſt impoſſible. Donc tout obſtacle ſera toujours en rapport fini avec la force, & finira toujours par la détruire,

ce qui démontre que le mouvement perpétuel eſt impoſſible.

8. La force ne peut, en rigueur, faire parcourir au corps qu'elle meut, des eſpaces égaux en tems égaux, parce qu'étant toujours diminuée par la perte que le corps qui lui réſiſte, lui fait éprouver, elle eſt toujours moindre, & par conſéquent elle ne peut faire parcourir au corps que des eſpaces qui lui étant proportionnels, ne peuvent que décroître en tems égal.

9. La réſiſtance que le corps oppoſe à la force eſt proportionnelle à la maſſe ou quantité de matiere, & ſuppoſe une tendance du corps vers un même point; car ſi ce corps ne tendoit pas vers un point, il ne réſiſteroit pas à l'action de la force, puiſqu'il eſt clair qu'un corps conçu ſans tendance ſeroit mû ſans oppoſer de réſiſtance à la force motrice. Cette tendance des corps vers un même point, eſt ce qu'on nomme peſanteur des corps. La peſanteur ſera donc proportionnelle à la maſſe ou quantité de matiere, contenue ſous le même volume.

10. Si une même force frappe différens corps, elle leur imprimera des vîteſſes qui ſeront en raiſon inverſe des quantités de matière renfermée dans ces corps; car dans

un corps qui auroit 2, 3, 4..... &c. fois plus de maſſe qu'un autre, la force étant diſtribuée ſur un plus grand nombre de parties, aura moins d'effet ſur chacune en particulier, & par conſéquent leur imprimera à proportion moins de vîteſſe. La vîteſſe du corps décroîtra donc à proportion que ſa maſſe augmentera. Elle ſera donc en raiſon inverſe des maſſes, c'eſt-à-dire comme $\frac{1}{m}$ à $\frac{1}{M}$, dans le cas où la maſſe m ſeroit ſuppoſée infiniment petite, par rapport à la maſſe M. Alors $\frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{M}{\infty}} = \frac{\infty}{M}$.

Donc, dans ce cas, le rapport des vîteſſes, imprimées par la même force f, ſeroit comme $\frac{1}{M}$ à $\frac{\infty}{M}$, ou comme 1 à ∞. D'où l'on voit qu'en diminuant à l'infini la maſſe m, d'un corps, frappé par une même force finie f, ſa vîteſſe croît à l'infini.

II. La force abſolue, ou quantité de mouvement d'un corps, eſt toujours le produit MV, de la maſſe M par ſa vîteſſe V. Car ſi la maſſe eſt ſuppoſée 2 M, & la vîteſſe V l'action de la force ſur le corps eſt alors double, par la définition précédente; donc 2 MV double de MV, ſera la quantité de mouvement, ou la force abſolue du corps.

Si la maſſe eſt M, & la vîteſſe $2V$, la force abſolue ſera encore $2MV$; puiſque la force employeroit autant d'action ſur une maſſe double $2M$ pour lui communiquer une vîteſſe ſous-double V, qu'elle en employera ſur une maſſe ſous-double M, pour lui communiquer une vîteſſe double $2V$: & comme il en ſeroit toujours de même, quelque ſuppoſition que l'on fît, il s'enſuit que la force abſolue, ou quantité de mouvement d'un corps, qui eſt toujours en proportion de l'action de la force ſur le corps qu'elle meut, ſera le produit de la maſſe du corps par la vîteſſe.

12. On appelle *Mouvement rectiligne*, ou en ligne droite, celui que la force imprimeroit à un corps qui, étant conçu ſans peſanteur, ſeroit mû dans le vuide parfait, par l'effet d'une ſimple impulſion de la force: le corps ne perdant alors rien de l'action que la force lui auroit communiquée, décriroit en ligne droite des eſpaces égaux en tems égaux; & ſon mouvement étant toujours uniforme, ſeroit infini.

13. On appelle *Mouvement curviligne*, celui qui réſulte d'une ſimple impulſion en ligne droite, imprimée par la force, combinée avec la peſanteur du corps qui le fait tendre, dans tous les momens, vers un

même point. Il eſt évident que le corps mû de cette ſorte, ne peut décrire qu'une ligne courbe, puiſque, par l'effet de la peſanteur, il changeroit à tout inſtant de direction, & que deux points de la ligne qu'il décriroit, ne pourroient être dans la direction d'une même ligne droite; en quoi conſiſte préciſément la *curvité*, ſi l'on oſe ainſi exprimer l'état de courbure.

14. Il eſt important de ne pas confondre le mouvement avec la force : le mouvement réſulte d'une ou de pluſieurs impulſions que le corps auroit reçues tout à la fois & dans un inſtant indiviſible, & la force dérive d'une ſomme infinie d'impulſions ſucceſſives, reçues dans le cours d'un tems quelconque *T*. La peſanteur, qu'on nomme auſſi gravité, force centrale, force centripète, eſt une force & non un mouvement, parce qu'elle eſt néceſſairement l'effet d'une ſomme infinie d'impulſions centrales que tout corps reçoit dans la ſuite d'une infinité d'inſtans qui compoſeroient un tems quelconque *T* fini, ou infiniment petit. Delà il ſuit qu'il n'y a nul rapport aſſignable entre le mouvement & la force.

Ainſi le mouvement curviligne des corps eſt l'effet d'une ou de pluſieurs impulſions

reçues dans un inſtant indiviſible, d'où réſulteroit le mouvement rectiligne ſimple ou compoſé, modifié à tout inſtant, par une force dont l'effet eſt de transformer le mouvement rectiligne en curviligne.

15. La direction du mouvement du corps eſt toujours ſuivant la tangente à la courbe qu'il décrit; & la direction de la force, ou peſanteur, ſuivant un rayon, conſtant ou variable, c'eſt-à-dire ſuivant la ligne menée du corps à ſon centre de peſanteur. Car dès que la direction du mouvement du corps, change à tout inſtant, par l'effet de la force centrale, ce corps tend donc à décrire la tangente qui ſeroit menée à la courbe, au point où il ſe trouve, ce qui réduit le mouvement curviligne à un mouvement ſucceſſivement dirigé, par l'effet de la force centrale, vers toutes les tangentes qu'il eſt poſſible de mener à la courbe que le corps décrit.

La tendance du corps vers la tangente, ou l'effort qu'il fait à tout inſtant pour ſuivre cette direction, eſt appellée aſſez mal-à-propos, force par la tangente, force de projection. Ce n'eſt ici qu'un ſimple mouvement, communiqué au corps, par l'effet d'une ſeule impulſion reçue. Ainſi on doit en rigueur l'appeller mouvement ou

impulſion par la tangente, pour ne pas confondre la notion du mouvement avec celle de la force.

16. On appelle *Mouvement ſimple* celui qui réſulte d'une ſimple impulſion communiquée au corps dans un inſtant indiviſible.

17. On appelle *Mouvement compoſé* celui qui eſt l'effet de pluſieurs impulſions que le corps recevroit tout à la fois & dans un inſtant indiviſible, par l'action de pluſieurs forces, dont les directions formeroient un angle.

18. Deux forces ne peuvent agir ſur un corps qu'en deux manières. Ou leurs directions ſeront dans la même ligne, agiſſant ſoit du même côté, ſoit en ſens contraire. Ou elles formeront un angle, qui pourra être plus grand ou plus petit.

19. Si l'on nomme A, l'eſpace que l'une des deux forces feroit parcourir dans un tems T; B, celui que feroit parcourir l'autre force, dans le même tems T; C, l'eſpace que l'action combinée des deux forces feroit décrire dans ce même tems, il eſt évident que quand les directions des deux forces ſeront dans la même ligne, ſoit du même côté, ſoit en ſens contraire, l'eſpace parcouru par le corps ſera toujours $A \pm B$

$=C$. Dans le cas où $A=B$, l'eſpace parcouru ſeroit $=2A$, ou $2B=C$, (dans le cas où les forces agiroient du même côté); & dans celui où elles ſeroient en ſens contraire, l'eſpace parcouru ſeroit $A-B=0$ $=C$, parce qu'alors les deux forces ſe détruiroient l'une l'autre, étant égales & en ſens contraire.

20. Le plus grand eſpace que deux forces A & B puiſſent faire parcourir à un corps, ce ſera donc quand elles ſeront du même côté, puiſqu'alors l'eſpace parcouru ſeroit $A+B$; & le plus petit eſpace, quand elles ſeront en ſens contraire, puiſqu'alors l'eſpace ſeroit $A-B$ ou $B-A$. Cet eſpace ſeroit même nul dans le cas où $A=B$. Dans ce dernier cas, la perte que feroient enſemble les deux forces, eſt toujours égale au double de la force moindre; puiſque celle-ci étant détruite par la plus grande force, détruit néceſſairement dans cette derniere une portion de force égale à elle. Ainſi la ſomme des deux forces ſe trouve diminuée du double de la force moindre.

21. Quand les directions des forces formeront un angle, les forces ſeront en partie en ſens contraire, enſorte qu'il y aura une partie de leur ſomme qui ſera détruite.

par le choc, le reſte ſera toujours exprimé par la diagonale du parallélogramme. Et c'eſt delà que dérive la loi qu'un corps mû par deux forces, dont les directions formeroient un angle, parcourra toujours la diagonale du parallélogramme des forces, dans un tems égal à celui que chaque force employeroit à lui faire parcourir ſéparément chacun des côtés : parce que quand les directions des forces forment un angle, la plus grande action que les forces A & B puiſſent imprimer au corps, eſt toujours moindre que leur ſomme $A + B$, & la plus petite action toujours plus grande que leur différence $A - B$ ou $B - A$: ce qui eſt évident, puiſque dans le cas où l'angle des directions ſeroit ſuppoſé infiniment petit, le mobile marcheroit alors avec la ſomme $A + B$ des deux forces, qui, dans ce cas, agiroient du même côté. Ce cas eſt celui de la moindre perte : la diagonale devient alors égale à la ſomme des deux côtés du parallélogramme, & eſt par conſéquent la plus grande poſſible.

Dans le cas, au contraire, où l'angle formé par les directions des forces, ſeroit ſuppoſé infiniment grand, ou de 180 degrés, les forces ſeroient en ſens contraire, & le mobile ne ſeroit mû qu'avec une force

exprimée par $A - B$ ou $B - A$. C'eſt ici le cas de la plus grande perte que pourroit faire la ſomme des deux forces, & de la plus petite diagonale décrite par le corps, puiſque la force $A - B$ ou $B - A$ ſe réduit même à zéro, dans le cas où $A = B$.

La propriété de la diagonale de tout parallélogramme fini ſera donc d'être toujours moins grande que la ſomme des deux côtés $A + B$, & toujours plus grande que leur différence $A - B$ ou $B - A$. Donc le corps parcourra toujours, en vertu des deux forces, la diagonale du parallélogramme des forces, puiſque l'eſpace qu'il décrira, quel que puiſſe être l'angle que formeroit la direction des forces, plus grand ou plus petit, ſera toujours moindre que la ſomme $A + B$, des deux côtés, & plus grand que leur différence $A - B$ ou $B - A$.

22. Il ſuit delà que les forces ſeront d'autant plus en ſens contraire, que l'angle formé par leur direction ſera plus grand, & dès-là la portion de ces forces détruites par leur choc, ſera plus conſidérable, & que la diagonale du parallélogramme des forces exprime toujours très-exactement la partie qui reſte de la ſomme de ces forces, après leur choc. Et la différence de la

ſomme des deux côtés, avec cette même diagonale, exprimera par conſéquent la partie de la ſomme de ces forces qui aura été détruite par le choc de forces qui étoient en partie en ſens contraire.

23. Une même force ne peut agir ſur un corps, qu'en deux manières. Ou cette force ſera appliquée au corps ſeulement pendant un inſtant indiviſible, ou elle lui ſera continuellement appliquée. Dans le premier cas, l'effet de la force ſera de faire parcourir au corps des eſpaces proportionnels aux tems durant leſquels ils auroient été parcourus, ou, ce qui eſt le même, de lui imprimer un mouvement uniforme. Dans le ſecond, la vîteſſe du corps croîtra, en tems égal, puiſque la force, en ſuivant le corps, lui imprimeroit à chaque inſtant de nouveaux degrés de vîteſſe, & les vîteſſes acquiſes étant proportionnelles au tems que le corps eût employé à les acquérir: il s'enſuit que les eſpaces parcourus ſeroient proportionnels aux quarrés des tems ou des vîteſſes, comme il réſulte de la propoſition ſuivante.

24. Le plus grand effet qu'une force quelconque *F*, puiſſe produire ſur un corps, c'eſt évidemment de lui faire parcourir des eſpaces proportionnels aux quarrés des

tems, puiſque ces eſpaces ſont ceux mêmes qu'elle feroit décrire dans le cas où elle ſeroit continuellement appliquée au corps; & qu'elle ne peut produire ſur le corps un plus grand effet que celui qui réſulteroit de ſon action continue.

25. Delà il ſuit qu'une force quelconque ne peut être ſuppoſée faire parcourir à un même corps des eſpaces proportionnels, par exemple, au cube, à la quatrième, cinquième... &c. puiſſance du tems dans lequel ils auroient été décrits; puiſque l'effet produit ſeroit alors ſupérieur à la force, ce qui implique.

26. Une même force appliquée à un corps ne peut que déployer ſur ce corps, à tout inſtant, la totalité de ſon action, ce qui eſt évident. Donc il ſeroit abſurde de ſuppoſer une force qui, étant appliquée à un même corps, lui imprimeroit tantôt plus, tantôt moins d'action en tems égal, puiſqu'il faudroit concevoir alors qu'une partie de l'action de la force ne ſeroit pas communiquée au corps, ce qui ne peut être.

27. Donc l'hypothèſe de M. Newton d'une force attractive, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance des corps à leur centre de peſanteur, eſt fauſſe, & ne peut être

vraie, puiſqu'il en réſulteroit que la force attractive ne déployeroit pas, à tout inſtant, la totalité de ſon action ſur un même corps ; mais graduellement & ſuivant que le corps ſeroit plus près ou plus loin de ſon centre de tendance.

Nommons p, la totalité de l'action de la force attractive ; D, la diſtance du corps à ſon centre de peſanteur. La portion d'action communiquée au corps, par cette force, ſeroit, ſuivant M. Newton, en raiſon de $\frac{1}{D^2}$, & par conſéquent l'eſpace que le corps parcourroit à cette diſtance en raiſon de $\frac{1}{D^2}$; à la moitié de cette diſtance D, c'eſt-à-dire, à l'intervalle $\frac{D}{2}$, la portion d'action que la force attractive communiqueroit au corps, ſeroit, toujours ſuivant M. Newton, en raiſon de $\frac{1}{\frac{D}{2}^2} = \frac{1}{\frac{D^2}{4}} = \frac{4}{D^2}$, c'eſt-à-dire, qu'elle ſeroit quadruple de la portion d'action $\frac{1}{D^2}$, communiquée à une diſtance double, & par conſéquent l'eſpace que le même corps parcourroit à cet intervalle ſeroit, en tems égal, en raiſon de $\frac{4}{D^2}$. Or il eſt abſurde de ſuppoſer qu'une

force attractive p, toujours appliquée à un corps M, ne déploye ſur ce corps que la portion d'action $\frac{1}{D^2}, \frac{4}{D^2}, \frac{16}{D^2}$..... &c. au lieu de déployer ſur lui, à tout inſtant, la totalité de ſon action p; car les actions $\frac{1}{D^2}, \frac{4}{D^2}, \frac{16}{D^2}$... &c. ne ſont que des parties de l'action totale p. On ſuppoſe ici avec tout le monde, & avec M. Newton lui-même, que les forces motrices ſont des cauſes aveugles, phyſiques, privées d'intelligence, comme toutes les forces phyſiques que nous connoiſſons, & qui étant néceſſitées de déployer ſur les corps qu'elles meuvent la totalité de leur action, ne peuvent par conſéquent jamais être ſuppoſées communiquer en tems égal, plus ou moins d'action ſur eux, quelle que puiſſe être la diſtance de ces corps à leur centre de peſanteur.

28. La meſure légitime de la force, c'eſt l'eſpace qu'elle fera parcourir dans un tems déterminé; car les forces motrices ne peuvent être connues que par les effets qu'elles produiſent ſur les corps; & ces effets étant les eſpaces décrits par les corps, dans tel tems T, déterminé, il s'enſuit que ce ſera par ces effets qu'il faudra meſurer

la force & les eſpaces par le tems T, qui ſera employé à les décrire.

29. Il ſuit de la dernière définition une nouvelle démonſtration contre l'hypothèſe de M. Newton, de forces attractives en raiſon inverſe du quarré des diſtances, puiſque, ſuivant cette hypothèſe, les eſpaces parcourus ne ſeroient plus meſurés par le tems T, qui auroit été employé à les parcourir, mais par la force attractive $\frac{1}{D^2}$; car il eſt évident qu'en tems égal, les eſpaces décrits croîtroient, dans ce ſyſtème, comme l'action de la force attractive augmenteroit, & par conſéquent ces eſpaces ne ſeroient plus proportionnels aux quarrés des tems employés à les décrire, contre ce qui eſt démontré dans tous les Livres qui traitent des Forces centrales. Car les eſpaces ne ſont proportionnels aux quarrés des tems, que quand la force p, déploye à tout inſtant, la totalité de ſon action ſur le corps. La force qui frappe le corps eſt alors conſtante, puiſque c'eſt toujours la force p; mais dans l'hypothèſe où la force p, déployeroit ſur le corps tantôt plus, tantôt moins d'action, il eſt évident que les eſpaces parcourus ne ſeront plus proportionnels aux quarrés des tems, & que dès-là

dès-là cette loi géométrique ſeroit renverſée par l'hypothèſe d'une attraction en raiſon inverſe du quarré des diſtances. Donc cette hypothèſe eſt abſolument fauſſe & controuvée, puiſqu'elle eſt contraire à la loi des eſpaces proportionnels aux quarrés des tems, qui eſt une loi géométrique.

30. J'appelle proprement *peſanteur*, *gravité*, *force centripète*, *force centrale*, cette force qui eſt imprimée à tous les corps dont l'effet eſt de les faire tendre à tout inſtant vers leur centre de peſanteur, en raiſon du produit de leur maſſe, ou quantité de matière, par la vîteſſe initiale, ou premiere impulſion centrale que la force motrice leur imprime dans le premier inſtant indiviſible & avant toute eſpece de vîteſſe acquiſe; enſorte que le corps étant ſuppoſé mû par cette ſeule & premiere impulſion centrale, ſans recevoir de nouvelles impulſions de la force motrice, ni de nouvelles vîteſſes, pût parcourir uniformément vers ſon centre de peſanteur un certain eſpace E, dans un certain tems T. Telle eſt l'idée préciſe que l'on doit ſe former de la peſanteur proprement dite, c'eſt-à-dire, l'idée d'une force centrale, uniforme & conſtante, qui en tems égaux feroit parcourir des eſpaces égaux.

31. J'appellerai *Force centrale accélératrice*, ou *accélérée*... &c. l'effet de l'action continue de la force ſur le corps, par lequel il parcourra toujours des eſpaces proportionnels aux quarrés des tems.

Ainſi, autre eſt la force de la gravité, de la peſanteur, de la force centrale, ou centripète uniforme, qui feroit parcourir aux corps des eſpaces proportionnels aux tems, & autre la force centrale accélératrice qui leur feroit décrire des eſpaces proportionnels aux quarrés de ces mêmes tems.

On a confondu juſqu'ici ces deux forces, ou pour mieux dire, on a appellé très-mal-à-propos peſanteur, gravité, force centrale, force centripète, les effets de la force centrale accélératrice. Les petites lignes compriſes entre la tangente & la courbe, appellées fléches, ſont les eſpaces que l'on ſuppoſe que la peſanteur, ou force centripète, feroit parcourir dans un tems infiniment court, & l'on n'a pas fait attention que ces eſpaces, quelque petits qu'on puiſſe les ſuppoſer, ne peuvent jamais être que les effets de la force centrale accélératrice, conſidérée pendant un très-petit inſtant t, & par conſéquent qu'on ne doit point les attribuer à la peſanteur proprement dite, qui en ſoi eſt une force uniforme.

32. Si la force accélératrice fait parcourir un eſpace E, dans un tems t fini, ou infiniment petit, la force de la gravité, ou la peſanteur ne feroit parcourir au même corps, pendant le même tems t, qu'un eſpace $=$ à $\sqrt{E}$; ce qui eſt évident, puiſque l'eſpace E étant en raiſon de t^2, l'eſpace $\sqrt{E}$, ſera en raiſon de $\sqrt{t^2} = t$.

33. D'où il ſuit que la peſanteur, ou force centrale, force de la gravité, force centripète conſtante, ne feroit jamais parcourir à un corps, d'un mouvement uniforme, que la racine quarrée $\sqrt{E}$, d'un eſpace quelconque E; que la même force, devenue accélératrice, lui feroit décrire dans le même tems t, d'un mouvement uniformément accéléré.

Et de-là il ſuit encore qu'on ne pourra déterminer l'expreſſion d'un eſpace quelconque, que la force centripète d'un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire une courbe, autour de ſon centre de peſanteur, lui feroit parcourir dans un tems t, que par l'eſpace que la force accélératrice lui feroit décrire dans le même tems, puiſque le premier eſpace eſt toujours la racine quarrée du ſecond.

34. Dans le cas où l'on voudroit établir une hypothèſe phyſique ſur le phénomène

PREMIERE OBSERVATION.

Sur la nature des forces centrales & ſur leur meſure.

QUAND on examine avec attention & avec un eſprit d'impartialité les différentes idées de M. Newton ſur les loix des forces centrales, on n'eſt pas long-tems à ſe convaincre que ces idées ne peuvent être que celles d'un très-mauvais Philoſophe, miſes en œuvre par un grand Géomètre. C'eſt à quoi M. Newton, un peu approfondi, ſera toujours réduit. Les idées de cet homme célèbre ſur les forces centrales, ſont qu'un même centre exerce différens degrés d'action, tantôt ſur un même corps, tantôt ſur différens corps, ſuivant leurs différens degrés de proximité de ce centre. Quand le corps eſt plus près du centre, l'action du centre ſur le corps augmente; quand il eſt plus loin, cette action diminue, enſorte que ce centre déploie tantôt plus, tantôt moins d'action ſur le corps en tems égal.

Or cette idée d'un même centre qui déploie en tems égal, tantôt plus, tantôt

moins d'action ſur les corps, eſt philoſophiquement & métaphyſiquement fauſſe. Elle ne peut donc être géométriquement vraie; car pour concevoir bien clairement l'action d'une force ſur un corps, on ne peut rien faire de mieux que de ſuppoſer que la force ſeroit immédiatement appliquée ſur le corps. Soit donc une force quelconque *F*, (*fig.* 1.) ſuppoſée appliquée ſur un corps *A*. Il eſt d'abord clair que cette force ne peut être que conſtante de ſa nature, puiſqu'elle ne pourroit avoir, par elle-même, qu'une action *m*, conſtante à tranſmettre au corps *A*, & qu'en vertu de cette tranſmiſſion d'action, le corps parcourroit, dans un tems *t*, un eſpace *E*, plus grand ou plus petit. Si la force abandonne le corps dans ſon trajet de *A* en *C*, & immédiatement après lui avoir tranſmis ſon action *m*, alors le corps ne recevant qu'une ſimple impulſion de la force, ſeroit mû uniformément, & parcourroit à l'infini des eſpaces égaux en tems égaux. Ces eſpaces ſeroient donc proportionnels aux tems employés à les parcourir, d'où ſuivroit cette analogie entre les tems, les vîteſſes & les eſpaces parcourus; $t : T :: v : V :: e : E$. Et comme les eſpaces parcourus ſont toujours un produit du tems par la vîteſſe, on auroit ce

égalités : $tv = e$, $TV = E$. D'où on tireroit $t = \frac{e}{v}$, $v = \frac{e}{t}$. $T = \frac{E}{V}$. $V = \frac{E}{T}$. C'eſt-à-dire que les tems t, T, ſeroient égaux aux eſpaces e, E, diviſés par les vîteſſes, ou les vîteſſes v, V, égales aux eſpaces e, E, diviſés par les tems. Mais l'action que la force auroit communiquée au corps, étant d'autant plus grande que l'eſpace e, E, qu'elle lui feroit parcourir, ſeroit plus grand, & le tems t, T, employé à le parcourir, plus petit, il s'enſuit que cette force ſeroit directement comme l'eſpace parcouru, & inverſement comme le tems, c'eſt-à-dire, en raiſon de $\frac{e}{t} = v$, $\frac{E}{T} = V$, c'eſt-à-dire en raiſon directe des vîteſſes. La meſure de cette force ſeroit donc le produit de la vîteſſe par le tems, puiſque l'effet de la force, par lequel elle doit toujours être repréſentée, ſeroit d'imprimer au corps une certaine vîteſſe v, V, en vertu de laquelle les corps, à la fin d'un tems t, T, auroient parcouru un eſpace e, E. Dans le cas où on voudroit exprimer la force par la vîteſſe v, V, on doit alors ſuppoſer le tems t, T, égal à l'unité, afin que v, V, exprime toujours un eſpace e, E, qui dans ce cas ſeroit le produit d'un tems $t = 1$ par la vîteſſe v;

car la vîteſſe ne peut faire connoître la force qu'autant qu'elle ſeroit conſidérée dans un tems, & l'eſpace parcouru ne pourroit non plus la manifeſter qu'autant que le tems durant lequel il auroit été décrit ſeroit connu. D'où il ſuit que la ſeule meſure de la force eſt la vîteſſe multipliée par le tems.

Dans le cas où la force F, ſuivroit le corps, & lui ſeroit perpétuellement appliquée, qui eſt le plus grand effet qu'elle pourroit produire ſur lui, il eſt évident qu'elle lui imprimeroit dans le cours d'un tems t, une ſomme d'action Sm, d'où réſulteroit un accroiſſement de vîteſſe en tems égal; car cette vîteſſe augmenteroit à proportion que le nombre des tems t, durant chacun deſquels la force auroit imprimé au corps la ſomme égale d'action Sm, ſeroit plus grand. A la fin du premier tems t, la ſomme d'action ou d'impulſions imprimées ſeroit Sm; à la fin du deuxieme tems t, $2\,Sm$, & ſucceſſivement $3\,Sm$, $4\,Sm$, $5\,Sm$, $6\,Sm$.... &c. à la fin de chaque tems ſuivant t. Donc la vîteſſe du corps croîtroit comme les nombres naturels $1, 2, 3, 4, 5$..... &c. Ces vîteſſes pourroient donc être exprimées par les élémens BC, DE, FG...., &c. d'un triangle

AHP (*fig.* 2), & ſeroient acquiſes dans une ſuite de tems égaux *AB*, *BD*, *DF*, &c. D'où il ſuivroit, 1°, que les vîteſſes acquiſes *BC*, *DE*... &c. ſeroient comme les tems *AB*, *AD*... &c. employés à les acquérir; 2°, que les eſpaces parcourus, ou le produit du tems *AB*, *AD*, *AF*.... &c. par les vîteſſes acquiſes *BC*, *DE*, *FG*... &c. à la fin de ces mêmes tems, ſeroient repréſentés par les triangles *ABC*, *ADE*, *AFG*.... &c. & en conſéquence que ces eſpaces ſeroient égaux à la moitié du produit du tems par la vîteſſe acquiſe, c'eſt-à-dire à $\frac{vt}{2} = ABC$, ou $= ADE$.... &c. 3°, Que l'eſpace *ABCO*, décrit uniformément avec la vîteſſe *BC*, acquiſe à la fin du tems *AB*, & pendant ce même tems, ſeroit toujours le double de l'eſpace *ABC*, décrit d'un mouvement uniformément accéléré pendant le même tems *AB*, c'eſt-à-dire que vt ſeroit toujours double de $\frac{vt}{2}$, ce qui eſt évident; 4°, Que $\frac{vt}{2}$ pouvoit être conſidéré comme un eſpace décrit uniformément avec la moitié de la vîteſſe $\frac{v}{2}$, acquiſe à la fin du tems t, & pendant ce même tems, ce qui fourniſſoit un moyen

de conſidérer un eſpace $\frac{vt}{2}$ décrit d'un mouvement uniformément accéléré, comme décrit uniformément avec une vîteſſe $\frac{v}{2}$, & pendant le même tems t; 5°, Que dans une ſuite d'inſtans égaux AB, BD, DF.....&c. les eſpaces décrits ABC, $BCDE$, $DEFG$... &c. étoient entr'eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7.... &c; 6°, Que les eſpaces parcourus ABC, ADE.... &c. depuis le commencement du mouvement, étoient entr'eux comme les quarrés des tems AB, AD.... &c. ou commme les quarrés des vîteſſes BC, DE.... &c. acquiſes à la fin de ces tems. D'où ſuivoient ces analogies :

$t : T :: v : V. \frac{tv}{2} : \frac{TV}{2} :: t^2 : T^2 : v^2 : V^2 :: e : E.$

Que la force accélératrice f, étoit toujours directement comme l'eſpace e parcouru, & inverſement comme le quarré t^2 du tems employé à l'acquérir, c'eſt-à-dire en raiſon de $\frac{e}{t^2} = \frac{tv}{2t^2} = \frac{v}{2t}$, & dans le cas où le tems $t = 1$, cette force étoit en raiſon de $\frac{v}{2}$, c'eſt-à-dire, en raiſon de la moitié de la vîteſſe $\frac{v}{2}$, acquiſe à la fin du tems

$t=1$, ou comme l'eſpace e, parcouru, ou la moitié du produit de la vîteſſe acquiſe par le tems employé à l'acquérir ; enſorte que cette force n'étoit jamais que la moitié de la force qui faiſoit décrire au même corps l'eſpace vt, double de $\frac{vt}{2}$, avec la vîteſſe v, acquiſe à la fin du tems t, & pendant le même tems, durant lequel le corps auroit parcouru d'un mouvement uniformément accéléré l'eſpace $\frac{vt}{2}$; cette force étant toujours en raiſon de $\frac{e}{t^2}$, $\frac{E}{T^2}$, on aura : $f=\frac{e}{t^2}=\frac{E}{T^2}=\frac{vt}{2t^2}=\frac{v}{2t}=\frac{VT}{2T^2}=\frac{V}{2T}$.

Telles ſont les loix qui réſultent de l'action d'une même force F, ſur un corps A. Ou cette force agira ſur le corps ſeulement pendant un inſtant indiviſible, ou elle lui ſera perpétuellement appliquée, voilà toutes les manieres dont la force pourra agir ſur les corps, & que l'on puiſſe concevoir. Dans le premier cas, les eſpaces parcourus ſeront proportionnels aux tems, & dans le ſecond, ils ſeront proportionnels aux quarrés des mêmes tems, ou des vîteſſes acquiſes ; & comme c'eſt là le plus grand effet qu'une même force F, puiſſe produire ſur un corps, puiſqu'on ne

peut pas concevoir qu'une force puiſſe produire un plus grand effet que celui qui réſulteroit de ſon action continue ſur un même corps : il s'enſuit qu'il eſt philoſophiquement & métaphyſiquement faux qu'une même force *F*, puiſſe produire ſur un même corps *A*, les effets que **M.** Newton lui attribue, de l'attirer en raiſon inverſe du quarré, du cube... &c. de la diſtance au lieu où réſideroit la force ; car dès-lors la force, en ne ceſſant d'être appliquée ſur le corps, déployeroit ſur lui en tems égal, tantôt plus, tantôt moins d'action ; il faudroit donc concevoir qu'au point *A*, par exemple, plus loin du centre *C*, où ſon mouvement ſeroit dirigé, elle n'auroit pas autant d'action qu'au point *D*, plus près du centre *C* ; puiſqu'en effet, par la ſuppoſition, ſon action ſeroit moindre, en tems égal, en *A*, qu'elle ne le ſeroit en *D*. Or on demande qui donneroit en *D*, à la force *F*, la portion *n*, d'action qu'elle déployeroit de plus ſur le corps, qu'au point *A* ? ou dans le cas où elle auroit par elle-même ce ſurplus *n* d'action, qui l'empêcheroit de le déployer ſur le corps au point *A*, & comment elle pourroit le tenir en réſerve, lui étant continuellement appliquée pour attendre qu'il fût parvenu préciſé-

ment au point D, pour le lui communiquer ?

Mais comme il n'eſt pas poſſible de concevoir dans une force, la propriété d'accroître, de ſoi, ſa propre action, & de ſe rendre plus grande qu'elle n'étoit ; ou de lui ſuppoſer la faculté de retenir par devers elle une partie de cette même action pour en tranſmettre, en tems égal, tantôt plus, tantôt moins au corps auquel elle ſeroit appliquée, & que de telles propriétés ne peuvent jamais être attribuées à aucune force de l'eſpece de celles dont il s'agit ici. Il s'enſuit que ces forces de M. Newton, dont l'action ſur un même corps varieroit en tems égal, en raiſon de quelque fonction de la diſtance de ces corps au centre de tendance, ne peuvent être que fauſſes & abſurdes, quoique la loi d'une tendance au centre, en raiſon de cette même fonction de la diſtance, pût être vraie. Par exemple, il pourroit être vrai que la tendance des corps planétaires au ſoleil fût en raiſon inverſe du quarré de leur diſtance à cet aſtre ; mais il ne peut jamais être vrai qu'une ſeule & même force, agiſſant ſur ces corps, ſoit par attraction, ſoit par impulſion, puiſſe produire, en tems égal, cette inégalité d'action qui réſulte de cette

loi, parce qu'une même force F, ne peut être conçue qu'avec une action conſtante m, qui la conſtituera ce qu'elle eſt, & qui ne pourra produire ſur un même corps que les deux effets dont il vient d'être parlé. Lui faire parcourir des eſpaces proportionnels aux tems dans le cas d'une ſeule impulſion communiquée au mobile, dans un inſtant indiviſible, ou des eſpaces proportionnels aux quarrés des tems dans le cas où elle lui ſeroit continuellement appliquée. Il eſt évident qu'un plus grand effet ne ſauroit être attribué à cette force, puiſqu'une force ne peut pas produire un effet plus grand qu'elle, ni qui puiſſe ſurpaſſer celui qui réſulteroit de ſon action perpétuelle ſur un même corps. S'il arrive donc que les loix du mouvement, conſidérées dans différens corps, circulant autour du même centre, établiſſent le fait d'une tendance en raiſon inverſe du quarré des diſtances; c'eſt alors une néceſſité de recourir à l'action de quelques corps, qui pourroit avoir la propriété de produire cet effet; comme ſeroit, par exemple, un fluide élaſtique qui ayant d'autant plus de force, dans ſes différentes parties, qu'elles ſeroient plus près du centre de tendance, imprimeroit différens degrés de vîteſſe cen-

trale aux corps que ce fluide rencontreroit, en pouſſant de la circonférence au centre, ſuivant que ces corps recevroient l'impreſſion des parties plus fortes ou plus foibles de ce fluide : dès-lors l'effet de la tendance, en raiſon inverſe du quarré des diſtances, n'eſt point attribué à une ſeule force, mais à une infinité de forces, diſtribuées dans les différentes parties d'un fluïde moteur, & c'eſt d'un tel principe que doit partir la loi d'une tendance en raiſon de quelque fonction des diſtances au centre commun de peſanteur.

Il ne ſuffit donc pas d'être Géomètre, & de calculer les effets d'une force à laquelle il aura plû d'attribuer telles ou telles propriétés ; il faut encore être Philoſophe pour n'attribuer aux forces que les propriétés qui peuvent leur convenir. Si le Géomètre doit mettre en calcul les idées du Philoſophe, l'eſprit de philoſophie doit diriger les idées du Géomètre, & l'empêcher de s'égarer dans des ſuppoſitions contraires à la nature des choſes. Il peut être fort commode au Géomètre de n'avoir qu'à ſuppoſer une même force en raiſon de quelques fonctions des diſtances des corps à leur centre de peſanteur, pour n'avoir plus qu'à calculer certains effets qui ſeront attribués

à

à cette force ; mais ſi cette force ſeule ne peut pas produire ces effets, s'il eſt néceſſaire que pluſieurs forces concourent pour les engendrer, en attribuant alors à une ſeule force les effets qui réſulteroient de l'action de pluſieurs, on tombe néceſſairement dans l'abſurde, en même tems que l'on couvre d'un voile impénétrable les reſſorts ſecrets qu'employe la nature dans la motion des corps.

SECONDE OBSERVATION.

Sur la nature du mouvement curviligne & ſur la maniere de le concevoir.

PLUSIEURS Géometres, même d'après M. Newton, conſidérant les courbes qui ſeroient décrites autour d'un ſeul & même point fixe, centre de peſanteur du corps, comme poligones d'une infinité de côtés rectilignes infiniment petits, ſe ſervent de la méthode du parallélogramme des forces, pour engendrer ces courbes : ils ſuppoſent que le corps en *A* (*fig.* 3.) eſt mû dans un tems infiniment court, par l'effet de deux impulſions, l'une *AB*, dans la direction de la tangente *AR*; l'autre *AD*, dans la direc-

tion du rayon AC; d'où par ces forces combinées, le corps parcourroit la diagonale, ou arc AO, du parallélogramme $ABOD$, dans le même tems qu'il eût employé à parcourir ſéparément chacun des côtés AB, AD, de ce parallélogramme; & faiſant le même raiſonnement à tous les angles o, g... &c. du poligone infini-latéral, ils en déduiſent la génération de la courbe $AogA$.

Cette génération du poligone infinitaire n'eſt nullement exacte; car que ce poligone ſoit ſuppoſé un cercle, il eſt démontré que vers l'origine A, la tangente AB eſt infiniment grande à l'égard de l'abſciſſe ou ſinus-verſe AD. Pluſieurs Géomètres ſe ſervent même de ce rapport infini, pour prouver que la force centrale AD ne peut rien faire perdre au mouvement de projection AB, attendu, diſent-ils, que la force repréſentée par AD, eſt infiniment petite à l'égard de la force repréſentée par AB, & qu'elle ne peut, tout au plus, que lui faire perdre une force infiniment petite du ſecond ordre, dans un tems t, infiniment petit; enſorte que la ſomme de toutes ſes pertes dans un tems t, fini, ne ſeroit qu'un infiniment petit du premier ordre, c'eſt-à-dire zéro.

On ne peut rien de plus abſurde que ces différentes idées ; car certainement la force centrale, & la force de projection d'un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire un cercle autour de ſon centre *C*, ſont de ſoi en rapport fini, & par conſéquent ne peuvent être exprimées par les lignes *AB*, *AD*, dont l'une eſt infiniment grande par rapport à l'autre ; & en effet nous démontrerons par la ſuite que la force de projection d'un corps qui décriroit un cercle, eſt toujours telle qu'elle lui feroit parcourir uniformément un arc, ou eſpace égal au rayon *AC* du cercle décrit, tandis que la force accélératrice lui feroit parcourir dans le même tems la moitié de ce même eſpace. Cette force accélératrice, par la premiere obſervation, ſeroit donc égale à une force uniforme qui feroit parcourir au corps, dans le même tems, le même eſpace, qui eſt ici le demi-rayon du cercle décrit. Donc la force de projection ſeroit à la force accélératrice, conſidérée dans le même tems *t*, qu'employeroit le corps, à décrire uniformément un arc *AM*, égal au rayon *AC*, comme 2 eſt à 1. Mais cette force conſidérée dans un même cercle décrit, eſt toujours la même force, par la premiere obſervation, quelque puiſſe être ſuppoſé l'arc

décrit AM, plus grand ou plus petit; puiſque $f = \frac{e}{t^2} = \frac{E}{T^2} = \frac{v}{2t} = \frac{V}{2T}$, par cette même obſervation. Il eſt donc faux que ces forces ſoient entr'elles dans le rapport infini de AD, à AB, & que par conſéquent, leur rapport puiſſe être exprimé par le rapport des deux côtés AD, AB, du parallélogramme $ADB\,o$, à la maniere de deux forces uniformes, d'autant plus que ces forces ſont de différente nature, l'une AB, uniforme, proportionnelle au tems t, l'autre AD, accélératrice conſtante proportionnelle au quarré du même tems. Il eſt évident qu'il n'exiſte aucun parallélogramme poſſible, dont l'un des côtés étant ſuppoſé t, l'autre puiſſe être exprimé par t^2.

La tangente ABR, doit être ſimplement conſidérée comme la ligne que ſuivroit le corps, s'il n'étoit animé d'aucune force centripète, & ſur laquelle doivent être pris les tems, pendant leſquels l'action de la force accélératrice ſeroit conſidérée. Ainſi on peut donc dire que dans le tems exprimé par AB, la force centrale feroit tomber le corps de la hauteur AD; mais non pas que les forces ſont entr'elles comme AB, eſt à AD; parce que ſi les forces étoient dans ce rapport, la force centrale AD, n'étant alors qu'un infiniment

petit du ſecond ordre, à l'égard de la force de projection AB, elle ne pourroit détourner le mobile de ſa direction rectiligne ABR, dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, que d'une quantité qui lui ſeroit proportionnelle, c'eſt-à-dire, d'un infiniment petit du ſecond ordre; par exemple, $\ddot{x}$; enſorte que la ſomme de toutes les forces centrales, qui auroit détourné le mobile de ſa direction par la tangente ABR, dans une ſomme infinie de tems $\dot{t}$, infiniment petits, ſeroit $S\ddot{x} = \dot{x}$, c'eſt-à-dire, que dans un tems fini t, le mobile ne ſeroit détourné de la direction d'une tangente finie ABR, que d'une quantité infiniment petite $\dot{x}$. Donc alors le mobile décriroit cette tangente finie dans un tems fini t, bien loin de circuler ſur la circonférence d'un cercle, puiſqu'il ne ſeroit détourné de la direction de cette tangente, dans un tems fini t, que d'une quantité infiniment petite $\dot{x}$. Il eſt donc faux que les forces ſoient entr'elles comme AB, eſt à AD; ni qu'on puiſſe les conſidérer comme les deux côtés d'un parallélogramme $ABDo$.

Pluſieurs Géomètres ſe ſont formé les idées les plus fauſſes ſur le rapport de la force de

projection avec la force centrale, afin d'étayer le ſyſtême de la génération des courbes, qui ſeroient décrites autour d'un point par la voie du parallélogramme. L'Auteur des préſentes obſervations conſerve encore une Note écrite de la propre main de l'Abbé de la Caille de l'Académie Royale des Sciences, à qui il avoit communiqué ces obſervations, ſur les vices qu'il trouvoit dans cette méthode d'engendrer des courbes par cette ſuite infinie de parallélogrammes dont les différens arcs de la courbe ſeroient les diagonales : elle porte : « qu'une force finie, modifiée par » une force infiniment petite, fait décrire » une courbe ; parce, dit-il, qu'à chaque » inſtant infiniment petit, la force infini- » ment petite, produit un effet infiniment » petit, qui devient fini dans un tems fini.»

Rien n'eſt plus abſurde que cette idée d'une force infiniment petite qui produit un effet ſur une force finie, dans un tems infiniment petit ; car cet effet eſt exactement nul à tout inſtant, étant à tout inſtant détruit par l'action de la force finie : ſi un corps A eſt mû de A, en R, par une force finie, il eſt évident qu'il n'y a qu'une force finie qui puiſſe le détourner de cette direction ; & qu'une force infiniment petite ne produi-

roit exactement aucun effet ſur ce corps. Que ce corps ſoit, par exemple, le globe de la Terre, emporté dans la direction de la tangente *AR*, qu'il tend à décrire, en tournant autour du ſoleil *C*. Suppoſons qu'à chaque inſtant infiniment petit *t*, ce globe reçoive l'action d'une chiquenaude, dirigée de tous les points de la tangente finie *ABR*, vers le ſoleil *C*, je demande s'il ne ſeroit pas du dernier ridicule de prétendre que l'action de cette chiquenaude ſeroit capable de détourner la Terre de ſa direction *ABR*, pour lui faire décrire le cercle *AMA*, autour du ſoleil *C*? L'action de cette chiquenaude étant nulle, à tout inſtant, par rapport à l'action qui emporteroit la Terre dans la direction de la tangente *ABR*, ne produiroit viſiblement aucun effet ſur ce globe. Il eſt donc de toute fauſſeté qu'*une force infiniment petite, puiſſe modifier une force finie, & faire décrire une courbe à un corps.* On s'écarte même ici des principes de M. Newton, qui ſuppoſe toujours que *le coup que le corps reçoit de la force centrale ſoit aſſez vif*, ce ſont ſes expreſſions, *pour pouvoir le détourner.* Mais ſi ce coup ne partoit que d'une force infiniment petite,

il eſt évident qu'il ne produiroit aucun effet ſur un corps, ſur-tout de dimenſions finies, & que par conſéquent il ne ſeroit point aſſez fort pour détourner le mobile de ſa direction par la tangente.

La plûpart des Géomètres ſont pleins d'idées de cette eſpèce, qui ſervent quelquefois de fondement à leurs formules, & & autres procédés géométriques, & que dès-là ils qualifient de *vérités*, ou *propoſitions démontrées*. L'action de la force qui emporteroit le globe *A*, dans la direction de la tangente *ABR*, eſt toujours finie, quoique conſidérée dans un tems infiniment court, parce que cette force a été imprimée tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible, & par l'effet d'une ſeule & même impulſion *ABR*. Donc le globe *A*, ne pourroit être détourné de la direction *AR*, que par l'action d'une force finie, qui lui ſeroit imprimée tout à la fois, & dans un inſtant également indiviſible dans une direction différente de la direction *ABR*, & nullement par l'action d'une force infiniment petite : & dans le cas où cet e action finie ſeroit répétée à tout inſt n, le mobile décriroit une courbe.

Ainſi un mouvement curviligne réſulte de l'action combinée de deux forces finies

qui agiroient ſur un même corps dans différentes directions, & dont l'action de l'une de ces forces ſeroit renouvellée à tout inſtant. Il eſt néanmoins des Géomètres qui improuvent l'uſage que l'on fait ici du parallélogramme. M. le Chevalier de Borda, de l'Académie Royale des Sciences, ayant entendu ces obſervations, contre cette méthode de décrire les courbes, dit en propres termes, qu'*on avoit eu tort de l'employer*. Un autre Géometre, grand Newtonien, l'a déſapprouvée au point d'avoir cherché même à en juſtifier M. Newton, qu'on accuſoit de l'avoir introduite dans la théorie des loix des forces centrales.

Un troiſième Géomètre écrivoit : » vous avez la plus grande raiſon de ſou- » tenir fauſſe l'application du parallélo- » gramme à la meſure des forces centrales : » 1°. Les forces, centripète & centrifuge, » devant être égales dans le cercle, il s'en- » ſuivroit une égalité entre le rayon & le » coſinus d'un angle. 2°. Par la décom- » poſition ordinaire, l'effet de la force cen- » trale devroit être le même que la nor- » male $\frac{g \cdot ds}{dy}$ (g étant la vîteſſe initiale, s l'arc » parcouru, & y l'ordonnée de cet arc,) » on auroit pour le cercle $\frac{g \cdot a}{a-x}$ ou $\frac{g \cdot a}{-x}$, ce

» qui ne s'accorde pas avec les réſultats » connus. Ces obſervations, & une infinité » d'autres vous donnent abſolument gain » de cauſe ſur cette queſtion. »

On verra par la ſuite pluſieurs autres obſervations qui confirment la vérité de ces pricipes. Qu'un corps ſur-tout de dimenſions finies, ne peut jamais décrire, autour de ſon centre de peſanteur, qu'une courbe rigoureuſe, & que l'idée d'une courbe, conſidérée comme poligone d'une infinité de côtés, ne doit point être admiſe, lorſqu'il s'agit de ſa génération réelle & phyſique.

TROISIEME OBSERVATION.

Sur l'égalité des forces centripète & centrifuge, conſidérées dans un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire un cercle autour de ſon centre, en même tems centre de peſanteur du corps.

TOUT le monde ſait que ſi un corps *A*, (*fig.* 4.) décrit un cercle *ABA*, en tendant continuellement vers ſon centre *C*, la force centripète du corps eſt néceſſairement égale à ſa force centrifuge : mais pour voir avec la derniere évidence la vérité de cette propoſition, il faut ſuppoſer que le rayon *AC*, ſera un fil, tendu par l'action d'une main qui ſeroit placée au centre *C*, du cercle décrit, au moment où la force de projection frapperoit le corps dans la direction de la tangente *ADT*. Il eſt clair que le corps tendroit à tout inſtant à ſuivre la direction de la tangente *AT*, vers laquelle il ſeroit pouſſé, & par conſéquent à alonger le fil *CB*, d'une quantité *BD* ; & que pour empêcher le rayon de s'alonger, il eſt néceſſaire que l'action de la main en *C*, faſſe un effort

contraire, tendant à raccourcir le rayon *CB*, d'une quantité *Bo*, égale à *BD*; & dès-lors le corps étant mû à tout inſtant entre deux forces contraires *BD*, *Bo*, l'une tendante à alonger le fil *CB*, d'une quantité *BD*, & l'autre à le raccourcir d'une quantité *Bo*, égale à *BD*, les deux forces ſeroient néceſſairement égales, puiſqu'elles feroient parcourir, dans le même tems, au même corps *A*, les eſpaces égaux *BD*, *Bo*, & partant, le mobile décriroit un cercle, puiſqu'il circuleroit entre deux forces contraires & égales *BD*, *Bo*, qui ne lui permettroient ni de s'approcher de la tangente *ADT*, ni du centre *C*, du cercle décrit, plus dans un tems que dans un autre.

Telle eſt la maniere de concevoir la génération du mouvement circulaire, dont il réſulte, 1°. que la main, placée en *C*, oppoſe à tout inſtant une force finie, & non infiniment petite, pour empêcher le mobile de ſuivre la direction de la tangente *ADT*: 2°. que la méthode du parallélogramme n'a nulle application à la génération de ce mouvement curviligne, l'arc décrit *AB*, ne pouvant être conſidéré comme la diagonale du petit parallélogramme *ANDB*, attendu la formation d'une force

centrifuge *BD*, à laquelle il eſt indiſpenſable d'avoir égard, contraire & égale à la force centripète *Bo*, dont il réſulte que le corps, dans ſon mouvement de tranſlation, doit être conſidéré, comme tiré en même tems, à l'extrémité *A*, du fil ou rayon *CA*, par deux forces contraires & égales *BD*, *BO*, dont les directions ne forment point d'angle entr'elles, & qui par conſéquent excluent toute idée de parallélogramme *ANDB*. L'on voit démonſtrativement qu'il en ſeroit de même de tout autre mouvement curviligne, autour d'un ſeul & même point fixe *C*, centre de peſanteur du corps; & que le corps, dans ſon mouvement de tranſlation, doit toujours être conſidéré comme tiré, dans le même tems, par deux forces contraires *BD*, *Bo*, qui ceſſeroient d'être égales, ſi la courbe décrite n'étoit plus un cercle décrit de ſon centre *C*, & que par conſéquent la nature de la courbe décrite par le corps dépendra uniquement du rapport des forces centripète & centrifuge *BO*, *BD* : dans le cas de l'égalité des deux forces, le corps circulant à l'extrémité d'un rayon conſtant *CA*, décriroit néceſſairement un cercle. Dans le cas de l'inégalité des deux forces, le rayon variera, ſoit par accroiſſement, ſoit par

décroiſſement, ſuivant que la force centrifuge ſera plus grande que la force centripète, ou la force centripète plus grande que la force centrifuge, & dès-lors la courbe décrite ne ſera plus un cercle.

REMARQUE.

Nous croyons devoir avertir ici que cette propoſition & celles qui ſuivent, ſuppoſent que la force centrale ne fait rien perdre à la force de projection, hypotèſe qui n'eſt nullement exacte; car l'on doit voir que la force centripète *B o*, étant en oppoſition avec la force centrifuge *BD*, détruit à tout inſtant cette derniere force; ce qui ne peut qu'affoiblir, dans tous les momens, le mouvement tangentiel *AT*, qui doit même finir par être entiérement détruit, comme on le démontre à la fin de l'ouvrage, où l'examen de cette queſtion a été renvoyé. Il ſuffit de dire ici que l'on a fait abſtraction de ce décroiſſement perpétuel d'action tangentielle, cauſé par la peſanteur du corps, tant dans cette propoſition que dans celles qui ſuivent.

QUATRIEME OBSERVATION.

Sur la nature des forces centripètes des corps qui décriroient différens cercles, autour d'un centre commun de pesanteur.

Il est très-facile de prouver que, si deux corps *A* & *E*, situés à différentes distances d'un centre commun *C*, de pesanteur, décrivent chacun un cercle autour de ce centre, le corps *E*, qui en seroit plus voisin, aura plus de force centripète, plus de force centrifuge, & plus de vîtesse de révolution que le corps, *A*, (*fig.* 5.) qui en seroit plus éloigné; car que le cercle *ENE*, décrit par le corps *E*, soit supposé le cercle égal *AMCA*, & le centre de pesanteur du corps *E*, transporté de *C* en *E*, il est évident que le corps *E*, transporté en *A*, décriroit le même cercle autour du point *E*, qu'il eût décrit au point *E*, autour du centre *C*, puisque ce corps se trouveroit toujours à la même distance de son centre de pesanteur, soit en *E*, soit en *A*. Mais il est manifeste que la circonférence *AMCA*, s'éloigneroit plus de la direction de la tangente commune *AP*, suivant la-

quelle le corps *E*, ſeroit frappé, que la circonférence plus grande *ABDA*, que décriroit le corps *A*, frappé dans la même direction *AP*; & en conſéquence qu'il faudroit plus de force centripète au corps *E*, qui auroit beſoin d'un plus grand effort pour s'éloigner davantage de la direction de la tangente commune *AP*, qu'au corps *A*, qui décriroit une circonférence *ABDA*, plus rapprochée de la direction de cette même tangente. Mais le corps *E*, ayant plus de force centripète que le corps *A*, aura auſſi, par la troiſieme obſervation, plus de force centrifuge, & auſſi plus de vîteſſe de révolution; puiſque les forces centriſuges ſont toujours proportionnelles aux vîteſſes de révolution. Donc les corps placés plus près du centre commun *C*, de peſanteur, qui décriroient des cercles, auront plus de force centripète, plus de force centrifuge & plus de vîteſſe de révolution, que ceux qui décriroient de plus grands cercles.

Dans le cas où le cercle décrit par le corps ſeroit infiniment rapproché de la direction de la tangente *AP*, on voit que ſa force centripète ſeroit infiniment petite; qu'alors le centre de peſanteur du corps ſeroit infiniment éloigné, & que les tendances

dances pourroient être conſidérées comme paralleles entr'elles, puiſqu'elles ne coïncideroient que vers un centre infiniment diſtant du corps. Dans ce cas le cercle décrit ſe transformeroit en parabole : & en effet l'équation au cercle $y^2 = 2rx - x^2$ ſe réduit à $y^2 = 2rx$, qui eſt une équation à une parabole dont le paramètre ſeroit $2r$, lorſque le rayon r devient infini, ou encore dans le cas où le rayon r, reſtant fini, l'équation au cercle $y^2 = 2rx - x^2$, ſeroit à un arc de cercle ſuppoſé infiniment petit ; car dans ces deux cas le terme x^2 devient nul à l'égard du terme $2rx$, ce qui réduit l'équation à $y^2 = 2rx$. Mais le corps, dans ces deux cas, eſt toujours préſumé à une diſtance infinie de ſon centre de peſanteur, ce qu'il importe de bien remarquer, attendu que cette diſtance ſe meſure toujours par l'abſciſſe ou ſinus-verſe x, qui devient toujours infiniment petite, relativement au rayon r, ſoit lorſque ce rayon devient infini, & que l'arc décrit eſt ſuppoſé fini, ſoit lorſque l'arc décrit eſt ſuppoſé infiniment petit, & le rayon r fini. Il eſt manifeſte que dans les deux cas, l'abſciſſe x, entreroit une infinité de fois dans le rayon r du cercle décrit, & que par conſéquent meſurant la diſtance du corps à ſon centre

de peſanteur par cette abſciſſe x, il en réſultera toujours que le corps, dans les deux cas, ſeroit infiniment éloigné de ce centre, ce qui fait que l'équation au cercle $y^2 = 2rx - x^2$, ſe réduit également dans l'un & l'autre cas, à l'équation à une parabole dont le paramètre ſeroit $2r$, puiſque dans les deux cas x^2 devient nul à l'égard de $2rx$, & cela par la raiſon préciſément que l'abſciſſe x, ſeroit, dans ces deux mêmes cas, contenue une infinité de fois dans le rayon r.

Delà il ſuit que la force centripète d'un corps qui décriroit une parabole, peut toujours être conſidérée comme celle d'un corps qui décriroit un cercle infini, ou un arc infiniment petit d'un cercle fini.

CINQUIEME OBSERVATION.

Sur la meſure de la force centripète d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre.

LE corps *A*, eſt ſuppoſé décrire le cercle *ADA*, (*fig. 6.*) en tendant continuellement vers le centre *C*, de ce cercle, centre de peſanteur du corps : on demande de déterminer la meſure de la force centrale de ce corps pendant le cours d'un tems *t*, employé à décrire un arc quelconque *AD*, de ce cercle, fini ou infiniment petit.

La force centrale de ce corps peut être conſidérée en deux manieres : 1°, par l'eſpace, par exemple *AE*, que la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans le tems *t*, employé à décrire l'arc quelconque *AD* ; & dès-lors *AE*, ſeroit la meſure de cette force pendant le tems *t*, puiſque ce ſeroit l'eſpace que le corps auroit parcouru, en vertu de cette même force, dans le cours de ce tems. 2°. On peut la conſidérer encore par un eſpace *AN*, qu'elle auroit fait décrire au même corps, s'il avoit employé à décrire un eſpace, tout l'effort

qu'auroit fait ce corps pour ſe retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il auroit tendu à parcourir, en décrivant l'arc *AD* dans le cours du tems *t*. Cette force ſeroit alors celle même qui auroit concouru à la génération de l'arc *AD*, ce qui eſt ſa vraie force centrale: car la force qui lui feroit parcourir l'eſpace *AE*, dans le même tems *t*, eſt une force accélératrice, très-différente de celle qui concourt à la génération de l'arc décrit *AD*, & qui retire le mobile de la direction de toutes les tangentes qu'il auroit tendu à parcourir en décrivant ce même arc, qui eſt une force uniforme, puiſque le corps fait le même effort à tout inſtant, au premier comme au dixième, centième, millième... &c. pour demeurer ſur la circonférence du cercle qu'il décriroit. Que le corps *A*, peſant ſur ſon centre de peſanteur *C*, ſoit ſuppoſé en repos & ſoutenu ſur la circonférence d'un cercle matériel *ADA*, ce corps preſſeroit par ſon poids cette circonférence. Or la force de cette preſſion eſt préciſément le poids du corps, ou ſa force centrale qui ſeroit évidemment la même à tous les points de cette circonférence. Mais il eſt clair que la force de cette preſſion conſtante, pendant le cours d'un tems *t*, employé à dé-

crire un arc quelconque AD, ne peut être exprimée par l'eſpace AE, que la force accélératrice feroit parcourir au corps pendant le même tems t, mais par un eſpace AN, décrit uniformément pendant ce même tems t, avec la force conſtante avec laquelle le corps preſſeroit la circonférence ADA, le corps preſſeroit cette circonférence en vertu d'une ſeule & même impulſion centrale & permanente qui lui auroit été communiquée ; laquelle étant employée à lui faire décrire un eſpace AN, le lui feroit décrire uniformément, cet eſpace AN : ſeroit donc proportionnel au tems t, employé à le parcourir, tandis que l'eſpace AE, décrit, non par l'effet d'une ſeule & même impulſion, mais par une ſomme d'impulſions que le corps auroit reçues dans le cours du même tems t, ſeroit proportionnel au quarré t^2 de ce même tems. Donc l'eſpace AN, & non l'eſpace AE, ſera la meſure de la peſanteur du corps ou de ſa force centrale, conſidérée pendant un tems t, & l'eſpace AE, ſera la meſure de la force accélératrice conſidérée pendant le même tems. Il ne faut donc point confondre la peſanteur avec la force accélératrice, comme on l'a fait juſqu'ici.

Nommons e, e, deux eſpaces que la pe-

ſanteur conſtante du corps lui feroit parcourir uniformément dans deux tems t, T; & e, E, deux eſpaces que la force accélératrice lui feroit parcourir pendant les mêmes tems t, T: l'on aura donc d'une part : $e : e :: t : T$, & par conſéquent $e^2 : e^2 :: t^2 : T^2$, & d'autre part: $E : E :: t^2 : T^2$. D'où on tirera $e^2 : e^2 :: E : E$, & par conſéquent $e : e :: \sqrt{E} : \sqrt{E}$.

Ainſi les eſpaces que la peſanteur conſtante d'un corps qui décriroit un cercle, lui feroit parcourir, ſeront toujours égaux, ou tout au moins proportionnels à la racine quarrée de ceux que la force accélératrice lui feroit parcourir pendant les mêmes tems. L'on aura donc $AN = \sqrt{AE}$. Par conſéquent la véritable meſure de la force centrale d'un corps qui décriroit un arc AD, de cercle, dans un tems t, ſera $\sqrt{AE}$, en ſuppoſant que AE fût l'eſpace que la force accélératrice auroit fait parcourir au corps pendant le même tems t.

Le raiſonnement précédent s'applique à la force centrale conſidérée en elle-même, ſans qu'il ſoit néceſſaire de la conſidérer dans le mouvement circulaire. On peut demander, par exemple, quelle eſt la meſure de la peſanteur de nos graves? Cette meſure n'eſt point les quinze pieds d'eſ-

pace qu'ils parcourent, dans la premiere ſeconde, vers le centre de la terre, c'eſt là la meſure de la force accélératrice. La meſure réelle de la peſanteur de ces corps, c'eſt la racine quarrée de ces quinze pieds d'eſpace qu'ils parcourent d'un mouvement uniformément accéléré; parce qu'en effet ſi un de ces graves *A* (*fig.* 7.) en repos ſur un plan fixe *BD*, & tendant par ſa gravité vers le centre *C*, de la Terre, employoit à parcourir un eſpace l'effort conſtant qu'il fait à chaque inſtant contre le plan *BD*, il eſt clair qu'il parcourroit cet eſpace d'un mouvement uniforme, & par le ſeul effet de la même impulſion centrale qui le fait tendre de *A*, en *C*, & preſſer le plan *BD*, au lieu que quand le corps tombe, par l'effet de la force accélératrice, le mobile eſt toujours mû par une ſomme d'impulſions, qui conſtituent ſa force accélératrice, & nullement ſa peſanteur proprement dite, telle qu'elle eſt quand le corps eſt en repos, où le corps ne tend à ſon centre que par l'effet d'une ſeule & premiere impulſion que la force centrale lui communique, & ſans recevoir de nouvelles impulſions de cette force. Or l'on peut conſidérer l'eſpace que cette ſeule & premiere impulſion feroit parcourir au corps dans un

tems t, & c'eſt cet eſpace qui doit être pris pour meſure de la peſanteur, ou force centrale du corps, pendant ce tems. Si donc la force accélératrice fait parcourir à nos graves environ quinze pieds dans la première ſeconde, la peſanteur, pendant ce même tems, ſera en raiſon de $\sqrt{15^P}$, proche la ſurface de la terre; c'eſt-à-dire que nos graves parcourroient un peu moins de 4 pieds dans une ſeconde, d'un mouvement uniforme, en vertu de l'impulſion centrale qui les fait tendre vers le centre de la Terre, lorſqu'ils ſont en repos.

Mais ſi la force accélératrice fait parcourir aux corps qui ſont dans la région de la Lune 3600 fois moins d'eſpace que la même force n'en fait parcourir à ceux qui ſont près de la ſurface du globe terreſtre, dès-lors les peſanteurs réelles à ces deux diſtances du centre de la Terre, ſeront entre elles non pas comme 1 à 3600, mais comme $\sqrt{1}$ à $\sqrt{3600}$, c'eſt-à-dire comme 1 à 60, & dès-lors ce qui peſeroit comme 1 vers la région de la Lune, peſera comme 60 proche la ſurface de la Terre, & la Lune étant à environ 60 rayons du centre de la Terre, il s'enſuit que les peſanteurs réelles ſeroient en raiſon inverſe des ſimples diſtances, & non point en raiſon inverſe du

quarré des diſtances, comme on le prétend. Le ſyſtême des peſanteurs, en raiſon inverſe & doublée des diſtances, n'eſt donc fondé que ſur la fauſſe meſure que l'on donne à la peſanteur, d'un eſpace parcouru d'un mouvement accéléré, qui eſt la meſure de la force accélératrice, tandis que la peſanteur, à la même diſtance du centre de tendance, étant conſtante, ne peut avoir pour meſure qu'un eſpace qu'elle feroit décrire d'un mouvement uniforme.

On a confondu ici la peſanteur avec la force accélératrice, & donné pour meſure à la premiere de ces forces la meſure de la ſeconde. Si l'on retranche l'accélération dans une ſuite d'eſpaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré, ce qui reſtera à ces eſpaces, ſera ce qui auroit été parcouru, dans le même tems, d'un mouvement uniforme, depuis le premier inſtant du mouvement; comme il réſulte du tableau ci-contre, qui démontre aux yeux que les eſpaces que la peſanteur, (conſidérée en ſoi, avant toute vîteſſe acquiſe par l'accélération du mouvement,) feroit parcourir aux corps, ſont toujours la racine quarrée

Tems.	Eſpaces accélérés.	Eſpaces uniformes.
1er t.	1	1
2e t.	3	1
3e t.	5	1
4e t.	7	1
5e t.	9	1
&c.	&c.	&c.

de ceux que la force accélératrice leur feroit décrire dans le même tems, à compter depuis le premier inſtant du mouvement.

SIXIEME OBSERVATION

Sur l'expreſſion de la force accélératrice, & de la peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre, ou telle autre courbe que l'on voudra ſuppoſer.

Le corps *A*, eſt ſuppoſé décrire un cercle autour du centre *C*, ſon centre de peſanteur : on demande de déterminer l'expreſſion de ſa force accélératrice, & celle de ſa peſanteur.

Que le corps *A* (*fig.* 8) ſoit ſuppoſé parcourir la tangente infiniment petite *AE*, dans deux tems *t*, égaux, décrivant la moitié *AB*, de cette tangente dans le premier tems *t*, & la ſeconde moitié *BE*, dans le ſecond tems *t*, égal au premier. J'obſerve que dès que le corps eſt ſuppoſé décrire un cercle autour du centre *C*, ſa force centripète étant égale à ſa force centrifuge, par la troiſième obſervation, le corps doit être tiré, à chaque inſtant, par deux forces égales *bA*, *dB*; *Ae*, *fE*, la première cen-

tripète tendante à raccourcir le rayon d'une quantité Ab, dans un tems t, & la ſeconde centrifuge tendante à l'alonger d'une quantité dB, égale à bA, dans le même tems t; & que par conſéquent dans deux tems $2t$, infiniment petits, la force centripète tendroit à raccourcir le rayon AC, d'une quantité Ae, égale à la quantité Ef, dont la force centrifuge tendroit à l'alonger pendant ce même tems $2t$.

Pour ſavoir actuellement ſi Ab & Ae ſont les eſpaces que la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans les tems t, $2t$, qu'il employeroit à parcourir les tangentes AB, AE, il n'y a plus qu'à ſavoir ſi ces eſpaces ſont égaux, dans le cercle, aux eſpaces dB, fE, que la force centrifuge lui feroit parcourir dans les mêmes tems t & $2t$; car il eſt évident que ce n'eſt que par cette égalité que l'on peut s'aſſurer qu'en effet Ab, Ae, ſeront les hauteurs verticales dont la force accélératrice feroit tomber le corps, dans le tems préciſément qu'il employeroit à parcourir les tangentes AB, AE.

Nommons x, le ſinus-verſe, ou l'abſciſſe Ab, Ae. y, l'ordonnée bd, ef, égale à la tangente AB, AE, quand l'arc Ad, Af, eſt ſuppoſé infiniment petit. L'é-

quation à cet arc de cercle ſera : $y^2 = 2rx - xx$, d'où on tirera : $\frac{y^2}{2r-x} = x$, qui, dans ce cas, ſe réduit à $\frac{y^2}{2r} = x$, puiſque x devient nul à l'égard de $2r$.

Ainſi l'expreſſion de l'abſciſſe ou ſinus-verſe x, ſera $\frac{y^2}{2r}$.

Nommons z, la fléche dB, fE, ou petite ligne compriſe entre le cercle & la tangente; on aura, par la propriété du cercle $\overline{z + 2r} \times z = y^2 = 2rz + z^2$. Donc $\frac{y^2}{2r+z} = z$, qui ſe réduit à $\frac{y^2}{2r} = z$, dans le cas d'un arc Ad, Af infiniment petit, puiſque, dans ce cas, z devient nul à l'égard de $2r$. Donc l'expreſſion de la fléche ſera $\frac{y^2}{2r}$, l'on aura donc : $\frac{y^2}{2r} = x = z$, c'eſt-à-dire que l'abſciſſe ou ſinus-verſe x, ſera égale à la fléche, & par conſéquent ces deux lignes exprimeront les forces centripète & centrifuge du cercle. L'expreſſion de ces forces ſera donc $\frac{y^2}{2r}$, c'eſt-à-dire le quarré de la tangente AB ou de l'ordonnée bd, ou de l'arc Ad, diviſé par le diamètre du cercle décrit. Et attendu que le diamètre $2r$ eſt une quantité conſtante, il

s'enſuit que les eſpaces que la force accélératrice feroit parcourir en différens tems, ſeroient toujours entr'eux comme les quarrés des arcs décrits pendant ces mêmes tems. Ainſi l'arc Af, étant ſuppoſé double, triple, quadruple... &c. de l'arc Ad, il ſeroit décrit dans un tems double, triple, quadruple, &c. du tems employé à décrire l'arc Ad; & par conſéquent la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans ce tems double, triple, quadruple..... &c. un eſpace Ae, 4, 9, 16... fois plus grand. Donc la force accélératrice du cercle eſt la même que celle qui précipite les corps au centre de tendance, puiſqu'elle feroit parcourir des eſpaces proportionnels aux quarrés des tems employés à les parcourir.

Si l'on nomme donc C, un arc quelconque fini, ou infiniment petit, d'un cercle dont le rayon ſeroit r, décrit par un corps, l'expreſſion de la force accélératrice, ou hauteur dont le mobile ſeroit tombé, pendant le cours du tems t employé à décrire cet arc C, en vertu de la force accélératrice, ſera toujours $\frac{C^2}{2r}$, & par conſéquent l'expreſſion de ſa peſanteur ſera, par l'obſervation précédente, $\sqrt{\frac{C^2}{2r}} = \frac{C}{\sqrt{2r}}$. La peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle,

eſt donc en raiſon compoſée de la raiſon directe de l'arc quelconque C, que ce corps décriroit dans un tems t, & de la raiſon inverſe & ſous-doublée du diamètre de ce cercle ; & comme le diamètre $2r$ eſt une quantité conſtante, il s'enſuit que la peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle, conſidérée en différens tems, eſt en raiſon directe de l'arc décrit pendant les mêmes tems, ce qui convient en effet à une force uniforme, telle qu'eſt celle qui opere la peſanteur conſtante dans un corps qui décriroit un cercle.

On obſervera combien la démonſtration que l'on vient de donner de l'expreſſion $\frac{C^2}{2r}$ eſt rigoureuſe, puiſqu'on l'a fondée uniquement ſur l'égalité des forces centripète & centrifuge, qui a lieu dans le cercle ; car on n'a conclu que l'abſciſſe, ou ſinus-verſe AB, AC, étoit véritablement l'eſpace que la force accélératrice feroit parcourir au corps, dans un tems t, pendant lequel il décriroit la tangente AB, AE, ou l'arc Ad, Af, que parce que cet eſpace étoit égal à l'eſpace dB, fE, que la force centrifuge lui feroit décrire dans le même tems : & en effet, puiſque ces deux forces ſont égales dans le mouvement cir-

culaire, il faut bien que le cercle donne le cas d'un ſinus-verſe égal à une fléche ; & ce cas a lieu quand l'arc décrit eſt ſuppoſé infiniment petit. Dans tous les cas d'un arc fini, l'abſciſſe n'étant point égale à la fléche, ne peut exprimer la hauteur dont le corps ſeroit tombé, pendant le tems employé à décrire l'arc; & auſſi dans tous ces mêmes cas la tangente n'eſt point égale à l'arc décrit, mais elle eſt toujours plus grande.

Delà il ſuit que pour être autoriſé à exprimer par l'abſciſſe AB, d'une courbe quelconque AdM, (*fig.* 9) ſuppoſée décrite autour d'un point fixe F, centre de peſanteur d'un corps A, l'eſpace que la force centrale qui auroit lieu dans cette courbe, lui feroit parcourir, dans le tems préciſément que la force de projection lui feroit décrire la tangente AE, il faudroit avoir déterminé 1°, le rapport des forces centripète & centrifuge, pendant le tems employé à décrire la tangente AE; 2°, prouver enſuite que les eſpaces AB, dE, ſeroient, à tout inſtant, dans le rapport de ces mêmes forces, & ſeroient chacun, ceux que ces forces feroient parcourir au corps, pendant ce même tems; car il ſeroit poſſible que pendant ce tems, la force

centripète qui auroit lieu dans cette courbe, fît parcourir à ce corps plus ou moins d'eſpace que celui qui ſeroit exprimé par l'abſciſſe AB; & que de même la force centrifuge lui fît décrire, dans le même tems, plus ou moins d'eſpace que celui qui ſeroit repréſenté par la fléche dE, ainſi qu'il arrive même au cercle dans tous les cas où l'arc décrit ne ſeroit pas indéfiniment petit; car alors ni l'abſciſſe, ni la fléche, ne peuvent ſervir de meſure aux forces centripète & centrifuge.

Pour s'aſſurer donc de la légitimité de cette meſure, l'on doit obſerver qu'ayant une fois déterminé l'expreſſion de ces forces dans le cercle, rien n'eſt plus facile que de déterminer l'expreſſion de ces mêmes forces dans une courbe quelconque; & en effet, ſi l'arc décrit en tems égal, n'eſt point un arc de cercle, il arrivera de deux choſes l'une, ou que le rayon vecteur augmentera, ou qu'il diminuera en tems égal. Dans le premier cas la force centrifuge y ſera plus grande que la force centripète, & dans le ſecond la force centripète y ſera plus grande que la force centrifuge. Mais la différence des rayons vecteurs exprime toujours très-exactement la quantité dont l'une des forces ſurpaſſeroit l'autre

l'autre. En ajoutant donc, ou retranchant cette différence des rayons vecteurs, à l'expreſſion de la force centripète du cercle que le corps tendroit à décrire à chaque inſtant, & qu'il décriroit en effet, ſi les deux forces étoient égales, il s'enſuit que l'on aura très-exactement l'expreſſion de la force centripète qui feroit décrire une courbe quelconque autour d'un point.

Soit donc une courbe quelconque *ANM*, (*fig.* 10.) ſuppoſée décrite par un corps *A*, autour du point fixe *F*, ſon centre de peſanteur, par l'action du mouvement angulaire du rayon vecteur *AF*, lequel eſt ſuppoſé décrire en tems égal *t*, les angles *AFo*, *oFe*, *eFg* . . . &c. finis, ou infiniment petits.

Nommons *r*, le rayon vecteur au commencement du tems *t*, & *R*, ce même rayon à la fin du même tems, ce rayon croîtra, ou décroîtra en tems égal *t*. Dans le premier cas, il ſera moindre au commencement du tems *t*, qu'à la fin, & dans le ſecond, il ſera plus grand : par conſéquent la différence des rayons vecteurs, à la fin du tems *t*, ſera $\pm R \mp r$; décrivant du centre *F*, de peſanteur les arcs de cercle *Aq*, *od*, *ef*, *gh* . . . &c. les parties de

rayon vecteur oq, ed, gf... &c. étant la différence des rayons vecteurs, exprimeront par conséquent les espaces qu'il faudra ajouter ou retrancher à l'expression de la force centripète du corps, considéré comme décrivant les arcs de cercle Aq, od, ef, gh... &c.

Ainsi il faudra donc dire: si le corps avoit effectivement décrit aux points A, o, e, g... &c. les arcs de cercle Aq, od, ef, gh.... &c. dans un tems t: nommant r, le rayon vecteur au commencement du tems, C, l'arc décrit pendant ce même tems; l'expression de la force accélératrice auroit été $\frac{C^2}{2r}$; mais il faut ajouter, ou retrancher à l'espace exprimé par $\frac{C^2}{2r}$, les espaces Oq, ed, gf..... &c. que le corps parcourroit de plus, ou de moins, dans le cours du même tems t, c'est-à-dire qu'il faudra ajouter ou retrancher à $\frac{C^2}{2r}$, la différence des rayons vecteurs $R-r$. Donc l'expression de la force accélératrice d'un corps qui décriroit une courbe quelconque ANM, autour d'un seul & même point fixe F, centre de pesanteur du corps, sera: $\frac{C^2}{2r}$

$\pm R \mp r$; & ſubſtituant actuellement à R, r, les rayons vecteurs propres à chaque courbe, il eſt évident que l'on auroit l'expreſſion de la force centripète propre à chacune.

Mais dans une courbe $A\,c\,M$, (*fig.* 11.) dont les rayons vecteurs FA, Fc, iroient en croiſſant, la fléche Bc, quand l'angle AFc eſt ſuppoſé infiniment petit, peut à l'origine de la courbe, exprimer la force centrale du corps: car décrivant du centre F, de peſanteur avec le rayon AF, l'arc de cercle Ad, meſure de l'angle infiniment petit AFc, il eſt évident que la fléche Bc eſt égale à $Bd - cd = \frac{C^2}{2r} - R + r$.

Il en ſeroit de même vers l'origine A d'une courbe (*fig.* 12.) dont les rayons vecteurs FA, Fd... &c. décroîtroient en tems égal, la fléche Bd, ſeroit égale à Bc, $+ cd = \frac{C^2}{2r} + R - r$.

Mais cette fléche ne peut plus ſervir de meſure à la force centrale, dans un autre point que celui de l'origine de la courbe; par exemple, dans un point M, où la tangente MN (*fig.* 11.) ne ſeroit plus perpendiculaire ſur le rayon vecteur FM; car décrivant l'arc de cercle infiniment petit MS,

& menant ſa tangente MV, l'on auroit $\frac{C^2}{2r} - R + r = VS - VS - NV = -NV$, pour expreſſion de la force centripète, tandis que la fléche ſeroit NQ. Il s'en faudroit donc de la quantité NV, que la force centripète du corps fût même égale à zéro, puiſque cette force auroit pour valeur la quantité négative $-NV$; & comme cette expreſſion de la force ne devient négative que parce que la tangente MN, n'eſt plus perpendiculaire ſur le rayon vecteur FM, comme elle l'étoit vers l'origine A, de la courbe; il s'enſuit quevers cette origine, la force centrale du corps étoit réduite à zéro; & en effet l'arc AC, de la courbe peut être conſidéré comme une petite ligne droite, tangente à l'arc de cercle Ad, & par conſéquent comme confondu avec la tangente AB; car cet arc & cette tangente ſe rapprocheroient toujours davantage, à proportion que l'angle FMN, formé par la tangente & le rayon vecteur, ſeroit moins obtus, & approcheroit davantage de la valeur d'un angle droit. Par conſéquent, vers le point A, de l'origine de la courbe, l'arc & la tangente ſeroient infiniment rapprochés, ce qui fait qu'on peut les conſidérer comme ſenſiblement confon-

dus vers ce point, & par conſéquent regarder la fléche CB, expreſſion de la force centripète, comme réduite à zéro. Et en effet, l'expreſſion $\frac{C^2}{2r} - R + r$ de cette force ſe réduit à zéro, dans le cas où l'arc Ac, de la courbe, & la tangente AB, peuvent être conſidérés comme confondus; parce qu'alors la différence des rayons vecteurs $R - r = Bd = \frac{C^2}{2r}$; & l'expreſſion de la force centrale devient $\frac{C^2}{2r} - R + r = \frac{C^2}{2r} - \frac{C^2}{2r} = 0$.

Il ſuit donc delà qu'un corps ne pourroit jamais décrire de courbes non rentrantes en elles-mêmes, autour d'un point fixe F, ſon centre de peſanteur; puiſque ſa force centrale ſe réduiroit à zéro, dès l'origine même A de la courbe, & à une quantité moindre que zéro; dans tout autre point de cette courbe; parce qu'un arc infiniment petit AC, de cette courbe, plus grand que l'arc de cercle Ad, peut toujours être conſidéré comme une petite ligne droite AB, tangente à cet arc; & qu'alors l'expreſſion $\frac{C^2}{2r} - R + r$ de la force centrale, ſe réduit à zéro vers le

point A ; & à une quantité moindre que zéro, dans tout autre point de la courbe.

Il eſt également manifeſte que les fléches OP ne peuvent être non plus la meſure de la force centrale dans les courbes où les rayons vecteurs $F\ldots$, FE, FQ (*fig.* 13.), iroient en diminuant, lorſque la tangente EO, ceſſeroit d'être perpendiculaire ſur le rayon vecteur EF ; car décrivant du centre F, de peſanteur, l'arc de cercle EN, & menant ſa tangente ME, la force centrale du cercle décrit avec ce rayon ſeroit $MN = \frac{C^2}{2r}$, & cette force augmentant de la quantité NP, c'eſt-à-dire de la différence des rayons vecteurs $R-r$, quand le corps décriroit l'arc EP de la courbe, il en réſulte que la force centrale du corps, décrivant l'arc EP de la courbe, ſeroit $MN + NP = \frac{C^2}{2r} + R - r$, qui eſt une quantité bien plus grande que la fléche OP. C'eſt donc à tort que les Géomètres expriment, dans tous les cas, les forces centrales par les fléches des arcs naiſſans ; ces fléches ne pouvant être l'expreſſion de ces forces, que vers le point A, de l'origine de la courbe, & quand la tangente eſt perpendiculaire ſur le rayon vecteur.

L'expreſſion $\frac{C^2}{2r} + R - r$ de la force centrale eſt toujours la même dans les courbes fermées de l'eſpece de $ADEQ$, où les rayons vecteurs diminuent en allant de A vers Q, ſoit au point A de l'origine, ſoit vers tout autre point ; & comme la différence $R - r$ des rayons vecteurs, eſt toujours une quantité poſitive, dans ce cas, il s'enſuit que jamais la force centrale $\frac{C^2}{2r} + R - r$ ne peut dans ces courbes ſe réduire à zéro, comme il arrive dans les courbes non fermées : ce qui démontre que ces courbes peuvent être décrites autour d'un point fixe F, & ſont même les ſeules qui puiſſent être décrites de la ſorte. Ainſi un corps A, tendant vers un point fixe F, ne pourra jamais décrire qu'une courbe fermée autour de ce point ; ce qui ſimplifie infiniment la théorie des loix des forces centrales, en réduiſant à une ſeule eſpece de courbes, & à la ſeule expreſſion $\frac{C^2}{2r} + R - r$, de la force centrale accélératrice, toutes les courbes qu'il eſt poſſible qu'un corps décrive autour d'un point, & toutes les forces qui les feroient décrire.

Si la courbe décrite par le corps eſt un cercle, décrit par ſon centre, la différence $R - r$ des rayons vecteurs étant zéro, l'expreſſion de la force accélératrice devient dans ce cas $\frac{C^2}{2r} + R - r = \frac{C^2}{2r}$.

Si la courbe décrite eſt une ellipſe, décrite par ſon foyer F, (*fig.* 14.) la différence des rayons vecteurs $R - r$, ſera DQ, dans le trajet du corps de A en Q, ou $EB = fF$, dans le cours d'une demi-révolution AQB; c'eſt-à-dire que quand le mouvement angulaire auroit pour meſure la demi-circonférence de cercle ADE, le mobile allant de A en B, s'approcheroit plus du centre qu'il ne feroit, s'il parcouroit cette demi-circonférence, d'une quantité EB, égale à l'intervalle fF, des deux foyers de la courbe, ce qui eſt en effet véritable. Donc l'expreſſion de la force accélératrice ſera toujours $\frac{C^2}{2r} + R - r$.

Si la courbe décrite eſt ſuppoſée la courbe AM, (*fig.* 15.) qui s'écarteroit à l'infini de ſon axe AT; le plus grand arc décrit par le rayon vecteur CA, ſeroit un arc fini, moindre que 180 degrés; par exemple, l'arc AB: enſorte que le rayon

vecteur CBS, ne rencontreroit la courbe AM, qu'à une distance infiniment éloignée du centre C de pesanteur. L'expression de la force, relativement à la totalité AB, du mouvement angulaire du corps, seroit, en supposant toujours l'arc $AB = C$, & $AC = r$, $\frac{C^2}{2r} - R + r$. Mais dans ce cas le rayon vecteur $R = CS$, est infini à l'égard du rayon $r = AC$, & de l'espace fini exprimé par $\frac{C^2}{2r}$. Donc, dans ce cas, l'expression $\frac{C^2}{2r} - R + r$ de la force se réduiroit à $-R$, puisque $\frac{C^2}{2r} + r$, seroient nuls à l'égard du rayon vecteur R, ce qui démontre de nouveau qu'un corps ne peut jamais décrire aucune espece de courbes non fermées, autour d'un seul & même point fixe C, puisque l'expression $\frac{C^2}{2r}$, dans laquelle entre celle de son mouvement angulaire, qui est toujours $\frac{C}{r}$, s'y réduit à zéro, & que le corps resteroit livré à l'action d'une seule force R, qui l'écarteroit à l'infini du point C; précisément comme il arriveroit s'il ne parcouroit qu'une ligne droite $ANOG$, vis-à-vis

d'un point C, vers lequel le corps n'auroit aucune tendance, ou tout au plus qu'une tendance infiniment petite, dont par conſéquent il s'éloigneroit à l'infini, ſans jamais changer de direction.

Dans le fait, un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire une courbe non fermée $A M$, autour de ſon centre C, de peſanteur, remonteroit à l'infini au-deſſus de ce centre, comme s'il parcouroit la droite indéfinie $A G$: ſon mouvement ſeroit donc ſucceſſivement retardé, & par conſéquent ce corps s'écarteroit toujours moins de ce centre en tems égal. Donc la différence des rayons vecteurs, en tems égal, ſeroit toujours moindre, & par conſéquent cette différence, dans le cas où la force de projection du corps ne ſeroit pas infinie à l'égard de ſa force centripète, finiroit par être réduite à zéro, dans un point de la courbe décrite; & dans les points ſuivans, les rayons vecteurs, loin d'augmenter, iroient en diminuant, comme il arrive dans l'ellipſe décrite par l'un de ſes foyers. Pour qu'il arrive donc que la différence des rayons vecteurs ſoit toujours moindre à l'infini, en même tems que les rayons vecteurs croîtroient à l'infini; il eſt clair que c'eſt une néceſſité de ſuppoſer la force

de projection infiniment grande à l'égard de la force centripète, dès le premier inſtant que cette force frapera le corps; afin qu'il arrive que dans le point le plus éloigné de la courbe, c'eſt-à-dire à la fin d'un tems infini, la différence des rayons vecteurs, en tems égal, ſoit zéro, & que ce ne ſoit que vers ce point que ces mêmes rayons ceſſent de croître en tems égal.

Ainſi la génération d'une courbe non fermée, ſuppoſée décrite autour d'un point C, centre de peſanteur du corps, par laquelle ce corps remonteroit à l'infini au deſſus de ce centre, & par conſéquent ſeroit mû d'un mouvement ſucceſſivement retardé à l'infini, en s'éloignant néanmoins à l'infini de ce même centre, la génération, dis-je, d'une telle courbe, ſuppoſe néceſſairement que la force centripète du corps ſeroit infiniment petite; puiſque ce ne ſeroit qu'après un tems infini que la différence $R - r$, des rayons vecteurs, en un tems égal t, fini, ſeroit zéro.

Mais il y a deux manieres qui produiſent le même effet, de concevoir comment la force centripète d'un même corps ſeroit infiniment petite; premierement, dans le cas où le corps circuleroit autour d'un centre de peſanteur infiniment éloigné:

ſecondement, ſi ce centre n'eſt pas infiniment diſtant du corps, dans le cas où la force de projection de ce corps ſeroit infiniment grande à l'égard de ſa force centripète. D'où il ſuit qu'afin qu'un corps puiſſe décrire une courbe non fermée autour d'un point fixe, conſidéré comme ſon centre de peſanteur, ſa force centripète relativement à ce point devant être infiniment petite : ce corps doit être conſidéré, ou comme mû par une force de projection infiniment grande, ou comme à une diſtance infinie de ce centre ; & par conſéquent ſes tendances, comme ſenſiblement paralleles entr'elles, comme dans la parabole de Galilée : ce qui veut dire que, dans le fait, une courbe non fermée ne peut être décrite par un corps, qu'autant que les tendances ſeront paralleles entr'elles, & jamais quand elles coïncideront vers un centre qui ne ſeroit pas infiniment diſtant de ce corps ; puiſque, dans le dernier cas, la force de projection devroit être infiniment grande à l'égard de la force centripète, & alors celle-ci étant nulle à l'égard de la premiere de ces forces, le corps ne décriroit qu'une ligne droite *A G*, au lieu de parcourir une courbe *A M*.

Tout arc de parabole *A S*, peut être

conſidéré comme un arc de cercle décrit avec un rayon infiniment grand, puiſque l'équation $y^2=2rx-x^2$ à l'arc AS, d'un cercle infini, ſe réduit à $y^2=2rx$ qui eſt à la parabole; mais en conſidérant l'arc de parabole AS, comme l'arc d'un cercle infini, il eſt évident que cet arc ne differe plus de la tangente AN, dans laquelle il finit par ſe confondre quand le rayon AC, devient infini. Donc alors la fléche NS, qui à l'origine de la courbe peut exprimer la force centripète du corps, tendant au point C, ſe réduit à zéro, comme on l'a déja dit; & dès-là le corps ne peut plus parcourir que la droite AG; parce que quand le centre C, de peſanteur n'eſt pas infiniment diſtant du corps, la force centripète de ce corps ne peut devenir infiniment petite ou zéro, qu'autant que la force de projection du corps ſeroit infiniment grande.

Ainſi tout arc indéfiniment petit AS, de parabole, pouvant être conſidéré comme un arc d'un cercle décrit à l'extrémité du rayon AC, infiniment prolongé, pourra par conſéquent être conſidéré comme exactement confondu avec la tangente AN, à l'arc de cercle AO, & par conſéquent la

fléche NS, expreſſion de la force centripète du corps, tendant en C, ſera exactement réduite à zéro, lorſque le corps ſeroit ſuppoſé devoir décrire une parabole ASM, autour d'un point C, qui ne ſeroit point infiniment diſtant du corps A : & c'eſt préciſément là le réſultat de la formule $\frac{C^2}{2r} - R + r$, de la force centripète, lorſque la fléche NS, ſe réduit à zéro ; parce que dans ce cas, la différence $R - r$, des rayons vecteurs, eſt $NO = \frac{C^2}{2r}$, & par conſéquent l'expreſſion de la force centripète devient $\frac{C^2}{2r} - \frac{C^2}{2r} = 0$.

La même vérité ſe prouve encore de pluſieurs manieres, quand un corps A, devroit remonter à l'infini au-deſſus de ſon centre C, de péſanteur, comme il arriveroit s'il devoit parcourir la droite AG ; & que ſon centre de peſanteur fût en A, ou décrire la courbe ASM, autour du centre C : il eſt évident qu'il faudroit imprimer à ce corps la même vîteſſe que celle qu'il auroit acquiſe par le ſeul effet de ſa gravité, s'il étoit tombé de la hauteur infinie GA, ou MA, afin que ce corps pût parcou-

rir le même eſpace infini AG, AM, en remontant continuellement au-deſſus de ſon centre de peſanteur, que celui qu'il auroit parcouru en deſcendant vers le même centre, ſoit directement par la droite GA, dans le cas où il devoit parcourir une ligne droite; ſoit en gliſſant, comme de deſſus un plan incliné, ſur la courbe non fermée MSA, dans le cas où il devroit décrire une telle courbe. Mais il eſt évident que la vîteſſe que le corps auroit acquiſe, après être tombé d'une hauteur infinie, & avoir parcouru les eſpaces GA, MSA, ſeroit infinie, puiſque cette vîteſſe auroit toujours augmenté, en un tems t, égal & fini; car il faut obſerver que les tems, les vîteſſes & les eſpaces parcourus, doivent toujours être d'un même ordre, & qu'on ne peut pas ſuppoſer qu'un corps, dans un tems fini t, n'acquierre que des vîteſſes infiniment petites, & ne parcoure que des eſpaces infiniment petits; car, dans ce cas, ces vîteſſes & ces eſpaces doivent être réduits à zéro; parce qu'en effet une vîteſſe infiniment petite, acquiſe dans un tems fini t; & un eſpace infiniment petit parcouru dans ce même tems fini, ne ſeroient abſolument rien. Ainſi le tems, l'eſpace, la vîteſſe,

doivent toujours être t, e, v. Dans le cas où le tems t, ſeroit ſuppoſé infiniment petit ou $\dot{t}$, l'eſpace & la vîteſſe doivent être $\dot{e}$, $\dot{v}$; car ſuppoſant le mouvement uniforme, l'eſpace parcouru ſeroit toujours égal au produit du tems par la vîteſſe. L'on auroit donc $e = tv$, & par conſéquent $t = \frac{e}{v}$. Si donc t, exprime un tems fini, l'eſpace e & la vîteſſe v ſeront d'un même ordre que le tems, & ſeront auſſi finis. Si t, n'exprime qu'un tems infiniment petit $\dot{t}$, alors l'eſpace & la vîteſſe ſeront infiniment petits.... &c. & il en ſeroit de même dans le cas où le mouvement ſeroit accéléré ou retardé ; car dans le premier cas la vîteſſe acquiſe eſt toujours proportionnelle au tems employé à l'acquérir ; & l'eſpace parcouru toujours proportionnel au quarré du tems employé à le parcourir. Par conſéquent les tems, les vîteſſes & les eſpaces parcourus ſeront toujours d'un même ordre. Quelque petite donc que pût être ſuppoſée la vîteſſe que ce mobile auroit acquiſe, à la fin d'un tems fini t, que le corps auroit employé à parcourir l'arc fini Mp, de la courbe, vers ſon extremité M, cette vîteſſe ne pourroit être que finie à la fin d'un tems fini t. Donc cette vîteſſe, qui eſt toujours

proportionnelle.

proportionnelle au tems employé à l'acquérir, augmentant pendant une infinité de tems finis t, que le corps employeroit à deſcendre vers ſon centre C, de peſanteur, en continuant de gliſſer de M en A, ſur la courbe non fermée MPA, ſeroit infinie quand le corps ſeroit parvenu au point A; & telle eſt la vîteſſe qu'il faudroit lui imprimer pour le faire remonter par la courbe non fermée $ASPM$ au-deſſus de ſon centre C, de peſanteur, afin que ce corps pût décrire la même courbe en ſens contraire, & remonter à l'infini au-deſſus de ce centre, dans le même tems, & par le même chemin qu'il auroit employé & tenu en deſcendant vers ce même centre. Ainſi la génération d'une courbe non fermée $ASPM$, ſuppoſée décrite autour d'un point fixe C, centre de peſanteur d'un corps A, ſuppoſe toujours que la force de projection qui ſeroit imprimée au corps au point A, du départ, ſeroit telle que ſa vîteſſe en partant ſeroit infiniment grande, & que dès-là, ſa force centripète ſeroit nulle, à l'égard de ſa force de projection.

Le corps A, étant ſuppoſé décrire la courbe non fermée $ABCDEN$, autour

de ſon centre F, de peſanteur, le rayon vecteur FA, décriroit en tems t, égaux & finis les aires égales, AFB, BFC, CFD.... &c. Par conſéquent le mouvement angulaire du rayon vecteur décroîtroit en tems égal à l'infini. Donc vers l'extrémité E de la courbe, (*Fig.* 16), le rayon vecteur FE, n'auroit plus dans un tems t, fini; qu'un mouvement angulaire infiniment petit EFN, que l'on pourroit regarder comme l'élément du mouvement angulaire fini AFB, puiſqu'en effet l'arc circulaire op, meſure du mouvement angulaire infiniment petit EFN, ſeroit infiniment petit à l'égard de l'arc AG, meſure du mouvement angulaire fini AFB. Mais, par ce qui vient d'être dit, l'arc infiniment petit op, qui ſeroit décrit dans un tems t, fini, ſeroit exactement zéro, puiſqu'un eſpace infiniment petit, décrit dans un tems t, fini, n'eſt abſolument rien dans le fait. Donc l'élément ou principe générateur du mouvement angulaire fini AFB, n'étant que zéro, il s'enſuit que le mouvement angulaire fini AFB, ſeroit également zéro, c'eſt-à-dire, ne pourroit exiſter, ſon élément ou principe générateur op, étant zéro.

Un arc fini AG, (x) ſuppoſé décrit dans

un tems t, fini, devenant l'arc infiniment petit $\delta p\,(\dot{x})$ à la fin d'une infinité de tems t, il eſt clair que, par la même raiſon, un arc infiniment petit $AS\,(\dot{x})$ ſuppoſé décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, deviendroit, à la fin d'une infinité de tems $\dot{t}$, l'arc infiniment plus petit $tG\,(\ddot{x})$; ce que l'on peut encore déduire de cette analogie relative aux ordres des quantités : $\dot{x} : x :: t : \infty t$. qui exprime que l'ordre de l'arc $\dot{x}$, eſt à l'ordre de l'arc x, comme le tems fini t, durant lequel le corps auroit parcouru l'arc fini x, eſt au tems infini ∞t, dans le cours duquel l'arc fini x, auroit toujours décru, & ſeroit devenu l'arc $\dot{x}$. Diviſant actuellement chaque terme de cette proportion par l'infini, l'on aura : $\frac{\dot{x}}{\infty}$: ou $\ddot{x} : \frac{\dot{x}}{\infty}$ ou $\dot{x} :: \frac{t}{\infty}$, ou $\dot{t} : \frac{\infty t}{\infty}$ ou t; c'eſt-à-dire, que l'on auroit cette analogie, dans l'ordre des quantités : $\ddot{x} : \dot{x} :: \dot{t} : t$, qui réſulte évidemment de la proportion ci-deſſus : $\dot{x} : x :: t : \infty t$; & qu'il eſt par conſéquent inconteſtable que ſi un arc fini x, ſuppoſé dé-

crit dans un tems t, fini, devient l'arc $\dot{x}$, à la fin d'un tems infini ∞t, de même un arc $\dot{x}$, ſuppoſé décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, deviendroit l'arc $\ddot{x}$, à la fin d'une infinité de tems $\dot{t}$, ou, ce qui eſt le même, dans le cours d'un tems t, fini.

Suppoſons à préſent une aire, ou un mouvement angulaire fini AFB, décrite dans un tems fini t, diviſée en une infinité de petites aires égales AFS, décrites chacune dans un tems $\dot{t}$ infiniment petit, l'arc AS, $(\dot{x})$ ſeroit la meſure du mouvement angulaire pendant le premier inſtant $\dot{t}$; mais cet arc, diminuant à l'infini, ne ſeroit plus vers l'extrémité tG, de l'arc fini AG, que $tG\,(\ddot{x})$. Or à ſuppoſer même que cet arc devînt conſtant & ne diminuât plus pendant tout le cours du ſecond tems fini t, employé à décrire la ſeconde aire finie BFC, égale à la premiere aire AFB, décrite dans le même tems; il eſt clair que l'arc décrit pendant cette ſuite infinie de tems $\dot{t}$, ou pendant le cours du tems fini t, égal à cette ſuite, ſeroit $S\ddot{x}=\dot{x}$. Ainſi dès la ſeconde aire

finie BFC, décrite dans un tems fini t, l'arc décrit ſeroit $\dot{x}$, ou zéro ; & comme le même raiſonnement s'appliqueroit également à l'aire AFB, ſuppoſée diviſée en deux aires égales A & B, & à l'aire A, ſuppoſée encore diviſée en deux aires égales C & D, & ainſi à l'infini, & que toujours l'arc $\dot{x}$, décrit au premier tems $\dot{t}$, ſeroit réduit à $\ddot{x}$, vers l'extrémité de l'aire A, ou C... &c. L'on voit que ſuppoſant enfin une aire infiniment petite, diviſée en deux aires égales M, N, décrites chacune dans un tems infiniment petit $\dot{t}$; ſi au commencement de la premiere aire M, l'arc décrit étoit $\dot{x}$, vers la fin de la même aire, l'arc décrit ne ſeroit plus que $\ddot{x}$, ou un infiniment petit du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, zéro. Ce qui démontre inconteſtablement que le mouvement angulaire ne peut entrer dans la génération d'une courbe non fermée puiſque ce mouvement s'y réduit toujours à zéro.

La même vérité peut encore ſe démontrer très-ſimplement en cette maniere : le mouvement angulaire du rayon vecteur AF, dans la génération d'une courbe

non fermée $ABDE$, ne peut jamais faire décrire qu'un angle fini; par exemple, AO, moindre que 180 degrés, en tournant même pendant un tems infini autour du point F, centre de peſanteur du corps. Il eſt d'abord aſſez difficile d'entendre comment ce rayon AF, pourroit tourner pendant un tems infini autour du centre C, ſans que jamais le point A, pût décrire un plus grand arc que l'arc AO, moindre que 180 degrés. L'on voit même que le tems, & l'eſpace parcouru ſeroient de différens ordres, puiſque l'eſpace AO (x), parcouru ſeroit fini, & le tems employé à le parcourir infini; & comment encore il pourroit arriver que deux points, pris ſur ce même rayon, l'un A, toujours à la même diſtance du centre F, décriroit en tems égal, des arcs AG, GH, HM... &c. toujours plus petits; tandis que le point extrême A, B, C, D, E, de ce même rayon, parcourroit un eſpace infini, en s'éloignant à l'infini du centre F, de peſanteur.

Mais enfin à ſuppoſer même que toutes ces idées pûſſent être auſſi vraies qu'il eſt vrai qu'elles ſont chimériques, fauſſes & abſurdes; il s'enſuivroit toujours que le rayon vecteur AF, ſeroit un tems

infini à décrire l'arc fini AO, ou x; ſon mouvement angulaire étant ſucceſſivement diminué en tems t, égal & fini. Mais l'on peut toujours ſubſtituer un mouvement uniforme à un mouvement variable, pourvu que le corps parcoure le même eſpace dans le même tems, par l'un & l'autre mouvement. Suppoſons donc un mouvement uniforme, capable de faire décrire au rayon vecteur AF, l'arc $AO(x)$, dans un tems infini ∞t. La vîteſſe moyenne du corps ſeroit donc $\frac{x}{\infty t}$; c'eſt-à-dire, l'eſpace parcouru diviſé par le tems employé à le parcourir : mais l'arc x, étant fini, la vîteſſe $\frac{x}{\infty t}$, ſeroit infiniment petite, conſidérée même dans un tems t, fini. Donc cette vîteſſe ne pourroit faire décrire au rayon vecteur AF, dans un tems t, fini, qu'un arc infiniment petit $\dot{x}$, qui ſe réduit toujours à zéro, quand le tems t, durant lequel il ſeroit décrit, eſt fini.

Dès que le corps ne peut décrire des eſpaces infiniment petits dans un tems t, fini, ce qui eſt évident; on voit à l'œil, qu'il y auroit néceſſairement un dernier arc fini op, qui termineroit le mouve-

ment angulaire ; puiſqu'en effet la ſomme de tous les arcs décrits G, GN, HM.... op, n'étant égale qu'à un arc fini AO, moindre que 180 degrés, ne pourroit jamais être infinie, ni par conſéquent la ſomme des tems finis t, employés à décrire chacun de ces arcs finis. L'arc AO, étant fini, ne peut jamais être diviſé en une infinité d'arcs finis ; par conſéquent, le nombre des arcs décrits G, GN, HM.... op.... ne pourroit jamais être que fini : ainſi que le nombre égal des tems t, employés à décrire ces mêmes arcs. La loi que ces arcs ſuivent dans leur décroiſſement, peut toujours ſe réduire à un décroiſſement uniforme qui produiroit le même effet à la fin du mouvement ; en ſuppoſant, par exemple, une quantité m, qui ſeroit la différence de l'arc ſuivant à l'arc précédent. Le premier étant A, le ſecond ſeroit $A - m$; le troiſieme $A - 2m$; le quatrieme, cinquieme... &c. $A - 3m$, $A - 4m$.... &c. Tous ces arcs étant décrits à la fin du même tems t, l'on auroit enfin un dernier arc décrit $A - N.m = 0$. D'où ſuivroit l'équation $A = N.m$, & $\frac{A}{m} = N$, qui ſeroit l'expreſſion de la durée du mouvement angulaire. Le tems

de la durée du mouvement ſeroit donc : $\frac{A}{m} = N.t.$

Pour que le mouvement angulaire pût être infini, ainſi que l'exigeroit la génération d'une courbe non fermée, ſuppoſée décrite autour d'un point F; l'on voit qu'il faudroit que la quantité m, qui exprimeroit le décroiſſement du mouvement réduit à un décroiſſement uniforme, fût infiniment petite à l'égard de l'arc A: car alors l'expreſſion $\frac{A}{m} = N.t$, de la durée du mouvement angulaire, donneroit un tems infini, ce qui eſt évident; puiſque ſuppoſant A, infiniment plus grand que m, l'on auroit : $\frac{A}{m} = \frac{A}{\frac{A}{\infty}} = \infty = N.t.$ Donc le tems $N.t$ de la durée ſeroit infini ; & en effet dans le cas où les arcs finis AB, BC, ne différeroient entr'eux que d'une quantité infiniment petite, il eſt clair que ces arcs étant ſenſiblement égaux, le corps décriroit un cercle d'un mouvement uniforme, & qu'alors ſon mouvement angulaire ſeroit infini.

Mais comme la quantité m, du décroiſſement du mouvement angulaire, réduit à un décroiſſement uniforme, ne pourroit

jamais être qu'une quantité finie, étant conſidérée dans une ſuite de tems t, finis; il s'enſuit que le tems $\frac{A}{m} = N.t$ de la durée du mouvement angulaire ſeroit toujours fini; & en conſéquence, que ce mouvement ne pourroit entrer dans la génération d'une courbe infinie & non fermée ADN, qui ne pourroit être ſuppoſée décrite autour d'un ſeul & même point fixe F, centre de peſanteur du corps, qu'autant que le mouvement angulaire de ce corps ſeroit infini.

On eſt donc fondé à ſoutenir chimérique, fauſſe & abſurde la génération des courbes non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un ſeul & même point, ainſi que les prétendues loix des forces centrales, par leſquelles on les fait décrire; puiſqu'on vient de prouver cette propoſition de pluſieurs manieres différentes.

On remarquera que le décroiſſement du mouvement angulaire en tems égal t, eſt au moins uniforme, à cauſe que ce décroiſſement procede de l'agrandiſſement ſucceſſif des angles FBS, FDV.... &c. formés par les directions du mouvement par les tangentes CS, DV... &c. & les rayons vecteurs FC, FD.... &c. Cet

angle devenant toujours plus obtus, à meſure que la courbe s'éloigneroit davantage du point *A*, de l'origine; le mouvement angulaire y décroîtroit toujours davantage en tems égal *t*, puiſque le mouvement s'éloigneroit toujours plus de l'état d'uniformité déterminé à l'angle de 90 degrés; & quand la direction du mouvement par la tangente eſt toujours perpendiculaire ſur le rayon vecteur, qui eſt le cas où le corps décriroit un cercle, d'un mouvement uniforme : par conſéquent l'angle, formé par la direction du mouvement, par la tangente & le rayon vecteur, devenant toujours plus obtus, à meſure que le corps décriroit des arcs de la courbe plus éloignés du point *A*, de l'origine, il s'enſuit que le mouvement angulaire du rayon vecteur y décroîtroit toujours davantage en tems égal *t*.

SEPTIEME OBSERVATION.

Sur la Génération du Mouvement circulaire.

IL y a peu de Géomètres qui ne ſachent que la vîteſſe avec laquelle un corps *A*, (*Fig.* 17) peſant ſur ſon centre *C*, de peſanteur, doit décrire un cercle *ABA*, eſt égale à celle que le corps auroit acquiſe, ſi on le ſuppoſoit tombé de la hauteur *AE*, moitié du rayon *AC*, par le ſeul effet de la force accélératrice; & néanmoins lorſqu'il s'agit d'aſſigner les forces qui feroient décrire cette courbe, on ne trouve dans la plupart des Auteurs que des choſes vagues, ſur les tangentes élémentaires, les ſinus-verſes, les flèches, & ſur-tout ſur le parallélograme des forces, dont on ne peut faire aucun uſage, lorſqu'il eſt queſtion de déterminer la force finie qui doit être imprimée au corps *A*, & dans un inſtant indiviſible, dans la direction de la tangente *AB*; & la force que doit lui imprimer, dans le cours d'un tems fini *t*, la force accélératrice pour que le corps puiſſe décrire le cercle *APA*.

Pour ſe former donc une idée claire &

juſte du mouvement circulaire d'un corps autour d'un point fixe C, centre du cercle décrit, & en même tems centre des forces; il ſuffira de concevoir que ſi le corps A, vient à être frappé par une force capable de lui faire décrire un eſpace AD, égal au rayon AC, ou à l'intervalle où le corps ſe trouveroit de ſon centre C, de peſanteur, dans une direction ADB, perpendiculaire à celle de ſa gravité AC, & dans un tems t, égal à celui qu'employeroit le corps, à parcourir, par le ſeul effet de la force accélératrice, un eſpace AE, moitié de l'eſpace AD, que la force de projection lui feroit décrire uniformément; ce corps mû de cette ſorte, décrira néceſſairement la circonférence de cercle APA.

Pour prouver la vérité de cette propoſition d'une maniere fort ſimple, il n'y aura qu'à faire voir que le quarré d'un arc AP, égal à la tangente AD, diviſé par le diamètre AT, du cercle, eſt en effet égal à la hauteur AE, dont on ſuppoſe que le corps ſeroit tombé dans un tems t, employé à décrire la tangente AD; parce que la tangente AD, ſe repliant ſur la circonférence APA, par l'action de la force centrale, y forme à la fin du tems t,

l'arc de cercle AP. Il faut donc prouver que $\frac{AP \times AP}{AT} = AE = \frac{c^2}{2r}$, l'expreſſion $\frac{c^2}{2r}$, eſt la formule générale des hauteurs dont la force accélératrice feroit tomber le corps dans le tems t, employé à décrire l'arc c, comme il réſulte de la ſixieme Obſervation.

Or, par l'hypothèſe, $AP = c$, $AE = \frac{r}{2}$, $AT = 2r$. Subſtituant donc dans l'équation $\frac{AP \times AP}{AT} = AE$, c à AP, $2r$ à AT, & $\frac{r}{2}$ à AE, l'on aura : $\frac{c^2}{2r} = \frac{r}{2}$, & en effet par la ſuppoſition $c = r$. Donc $\frac{c^2}{2r} = \frac{r\,r}{2r} = \frac{r}{2}$.

Delà il ſuit que la vîteſſe avec laquelle le corps décriroit le cercle, eſt en effet égale à celle qu'il auroit acquiſe, s'il étoit tombé de la hauteur AE, moitié du rayon AC.

On peut prouver la même propoſition d'une maniere encore très-ſimple & très-élégante, en obſervant que comme la vîteſſe avec laquelle le corps décriroit le cercle eſt conſtante, s'il exiſte un ſeul arc x, dans le cercle, qui puiſſe être parcouru avec la vîteſſe que le corps auroit

acquiſe, par l'action de la force accélératrice, dans un tems t, égal à celui qu'employeroit le corps à décrire ce même arc x, il étoit inconteſtable que cette vîteſſe devoit être celle même avec laquelle le corps devoit décrire le cercle entier. Pour parvenir donc à connoître cet arc x, on remarquera que l'expreſſion des hauteurs verticales étant toujours $\frac{c^2}{2r}$, dans le cas particulier de l'arc x, décrit avec la vîteſſe que le corps auroit acquiſe en tombant pendant tout le tems t, employé à décrire cet arc; l'eſpace parcouru, par la force accélératrice, étant $\frac{x^2}{2r}$, cet eſpace ſeroit la moitié de l'arc x, décrit uniformément avec cette même vîteſſe, & pendant le même tems. L'arc x, ſeroit donc $\frac{2x^2}{2r} = \frac{x^2}{r} = x$.

Donc $x^2 = rx$, & par conſéquent $x = r$. Donc cet arc, eſt celui qui ſeroit égal au rayon du cercle décrit. Il n'exiſte donc point d'autre arc dans tout le cercle, qui puiſſe être décrit avec la vîteſſe que le corps auroit acquiſe, s'il étoit tombé pendant tout le tems t, employé à le décrire, & qui ſoit par conſéquent le double de l'eſpace que la force accélératrice feroit

parcourir à ce corps pendant ce même tems.

Si l'on nomme t, le tems que la force accélératrice employeroit à faire parcourir au corps le demi-rayon $\frac{r}{2}$ du cercle, l'on voit que le tems de la révolution entiere du corps ſera environ $6\frac{2}{7}t$.

L'on doit voir encore que la même force feroit parcourir au même corps dans le tems $6\frac{2}{7}t$, de ſa révolution, le triple & un ſeptième de la circonférence du cercle décrit. Nommant C, cette circonférence, l'eſpace que feroit parcourir la force accélératrice, pendant le tems $6\frac{2}{7}$, ſeroit $3\frac{1}{7}C$.

Si l'on nomme T, le tems de la révolution d'un corps par la circonférence d'un cercle, t, le tems qu'il employeroit à décrire un arc quelconque x, de ce même cercle; l'eſpace que la force accélératrice feroit parcourir à ce corps, pendant le tems t, employé à décrire l'arc x, ſera toujours : $\frac{x^2}{2r} = 3\frac{1}{7}C \times \frac{t^2}{T^2}$.

Si un corps A, eſt ſuppoſé recevoir une impulſion de la force de projection aſſez grande pour lui faire parcourir un eſpace AB (*Fig.* 17), égal à la circonférence

rence du cercle *APA*, dans un tems *T*, égal à celui de ſa révolution, & qu'on le ſuppoſe animé en même tems d'une force centrale conſtante, égale à l'effort que feroit le corps à tout inſtant pour ſe retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendroit à parcourir, & qui étant employée à lui faire décrire un eſpace, lui fit parcourir uniformément dans le même tems *T*, un eſpace exprimé par $V\overline{3\frac{1}{7}C}$, le corps, par ces forces combinées, décriroit le cercle *APA*, ce qui eſt évident par la cinquième Obſervation. On voit que c'eſt ici la vraie force centrale du cercle, celle qui eſt véritablement employée à le retirer à tout inſtant de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendroit à parcourir, & dont l'effet eſt de replier, par une action égale, la tangente *AB*, ſur la circonférence *APA*. Nulle portion de la force accélératrice, n'eſt viſiblement employée à produire cet effet, qui réſulte de l'action d'une force uniforme, qui par conſéquent doit être exprimée par l'eſpace $V\overline{3\frac{1}{7}C}$, qu'elle feroit parcourir à un corps uniformément dans le tems *T*, de ſa révolution. Par conſéquent la force par la tangente ſera à la

force de la peſanteur, comme C, eſt à $\sqrt{3\frac{1}{7}C}$, puiſque ces eſpaces ſont ceux que les deux forces feroient décrire au corps dans le même tems T, de ſa révolution.

Si des corps décrivent différens cercles, autour d'un centre commun de peſanteur; leurs forces accélératrices, en tems égal, ſeront entr'elles comme les rayons de ces mêmes cercles, diviſés par le quarré des tems des révolutions; c'eſt-à-dire, comme $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$; car les eſpaces parcourus, par l'action des forces accélératrices, dans un tems commun N, ſeroient : $3\frac{1}{7}C\times\frac{N^2}{T^2}$, & $3\frac{1}{7}C\times\frac{N^2}{t^2}$: diviſant par le quarré N^2, du tems commun, & ſubſtituant les rayons R, r, aux eſpaces $3\frac{1}{7}C$, $3\frac{1}{7}c$, qui ſont dans le même rapport, le rapport des forces accélératrices ſera comme : $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$, ou comme : $\left.\frac{\frac{R}{T^2}}{\frac{r}{t^2}}\right\} = \frac{Rt^2}{rT}$. Par conſéquent le rapport des peſanteurs réelles des deux corps ſera $\sqrt{\frac{Rt^2}{rT^2}} = \frac{t}{T}\sqrt{\frac{R}{r}}$

On prouveroit de même que les vîteſſes de ces corps ſeroient entr'elles comme $\frac{R}{T}$, à $\frac{r}{t}$, ou comme $\sqrt{\frac{1}{R}}$ à $\sqrt{\frac{1}{r}}$; & que les quarrés des tems des révolutions ſont proportionnels aux cubes des diſtances, ou rayons des cercles parcourus; car les vîteſſes étant $\frac{R}{T}$, $\frac{r}{t}$, les quarrés des vîteſſes ſeroient : $\frac{R^2}{T^2}$, $\frac{r^2}{t^2}$. Donc l'on aura cette analogie : $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} :: r : R$; puiſque chacun de ces cercles étant décrit avec la vîteſſe que le corps auroit acquiſe, après avoir parcouru le demi-rayon de ſon cercle, les quarrés de ces vîteſſes ſeroient proportionnels aux demi-rayons, ou aux rayons de ces mêmes cercles. Donc l'analogie ci-deſſus donnera l'équation $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$. D'où l'on déduit, avec la plus grande facilité, la ſeconde loi de Képler, ſi fameuſe en aſtronomie. $R^3 : r^3 :: T^2 : t^2$.

Cette loi peut encore ſe déduire de ce raiſonnement ſimple : le tems T, de la révolution d'un corps eſt toujours en raiſon compoſée de la circonférence, ou rayon R, du cercle décrit, & de la raiſon

inverſe de la vîteſſe $\sqrt{\frac{1}{R}}$. L'on aura donc T, en raiſon de $\frac{R}{\sqrt{\frac{1}{R}}}$, & par conſéquent T^2, en raiſon de $\left.\frac{R^2}{\frac{1}{R}}\right\} = R^3$. Donc le quarré du tems de la révolution du corps, ſera toujours en raiſon du cube de la diſtance, ou du rayon du cercle décrit.

Dans le cas de différens cercles parcourus par des corps, autour de leur centre commun de peſanteur, les forces accélératrices ſeront entr'elles, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, ou rayons des cercles décrits; car ces forces ſont entr'elles comme $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$. Subſtituant aux quarrés T^2, t^2, des tems des révolutions, les cubes des rayons R^3, r^3, qui ſont dans le même rapport, l'on aura le rapport des forces comme : $\frac{R}{R^3}$ à $\frac{r}{r^3}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{R^2}$ à $\frac{1}{r^2}$, c'eſt-à-dire encore, en raiſon inverſe du quarré des rayons. Et par conſéquent, les peſanteurs réelles de ces corps ſeront entr'elles comme $\sqrt{\frac{1}{R^2}}$ à

$\sqrt{\frac{1}{r^2}}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{R}$ à $\frac{1}{r}$, ou en raiſon inverſe des ſimples diſtances, ou rayons des cercles décrits.

Ces différentes loix ſont autant de vérités géométriques, de la certitude deſquelles il n'eſt par conſéquent pas permis de douter.

Comme le tems des révolutions entre dans le rapport des forces accélératrices, & dans celui des peſanteurs; puiſqu'on vient de prouver que les forces étoient entr'elles comme $\frac{R}{T^2}$ à $\frac{r}{t^2}$, & les peſanteurs dans le rapport de $\frac{\sqrt{R}}{T}$ à $\frac{\sqrt{r}}{t}$: l'on peut encore en déduire une nouvelle preuve contre l'hypothèſe de la génération des courbes non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un ſeul & même point fixe : car comme le tems T, t, de la révolution par la circonférence de ces courbes ſeroit infini, comme ſeroit celui de la révolution d'un corps qui ſeroit ſuppoſé devoir parcourir un cercle infini; il s'enſuit que ces courbes pourroient être aſſimilées au cercle infini, & que l'on pourroit en conclure que les rayons R, r, s'alongeroient à proportion que les tems T, t, des révo-

lutions ſeroient plus longs, & que par conſéquent quand ces tems deviendroient infinis, comme dans les courbes non fermées, le corps circuleroit à l'extrémité d'un rayon vecteur infini, ſa force centripète devenant infiniment petite; & que ce n'eſt qu'à l'extrémité de tels rayons, & non point à l'extrémité de rayons finis, & quand la force centripète du corps ſeroit infiniment petite, que les corps pourroient être ſuppoſés décrire des courbes, autour d'un ſeul & même point fixe, comme on l'a déja dit de la parabole.

HUITIEME OBSERVATION.

Sur la génération du Mouvement elliptique.

SI un corps *A*, tendant vers ſon centre de peſanteur *F*, (*Fig.* 18), eſt frappé dans une direction *AD*, perpendiculaire à celle de ſa gravité *AF*, par une force qui lui communique plus ou moins de vîteſſe que celle qui ſeroit requiſe pour qu'il pût décrire un cercle, autour du même centre *F*; ce corps, par ces forces combinées, décrira une ellipſe, autour du point *F*,

qui ſera l'un des foyers de cette courbe.

Pour prouver la vérité de cette propoſition, il ſuffira de faire obſerver que la ſomme des forces centripète & centrifuge eſt une quantité conſtante, lorſqu'un corps circule autour d'un centre *F*, & que l'une des forces regagne toujours très-exactement ce que perd l'autre force ; puiſque ſi le corps a plus de force centrifuge dans un point de la courbe, il a néceſſairement, à ce même point, d'autant moins de force centripète ; & s'il a plus de force centripète, il doit avoir d'autant moins de force centrifuge ; enſorte que la ſomme des deux forces demeure invariablement la même dans tous les points de la courbe décrite.

Il faut obſerver en ſecond lieu l'effet que produit ſur le corps, la variation de l'angle formé par le rayon vecteur *MF*, & la tangente *ME*, qui exprime toujours la direction de la force de projection. Quand le corps ne décrit point un cercle, cet angle eſt tantôt plus grand, tantôt plus petit, tantôt droit, tantôt aigu, tantôt obtus. Quand cet angle eſt aigu, comme au point *M*, la direction *ME*, de la force de projection étant plus rapprochée de la direction *MF*, de la force cen-

trale, il eſt évident que le corps doit être plus pouſſé vers le centre *F*, des forces, puiſqu'alors une partie de l'effet de la force de projection *ME*, doit ſe faire dans la direction *MF*, de la force centrale. Et en effet, ſi l'on ſuppoſe que la direction *ME*, ſe confonde avec la direction *MF*; il eſt inconteſtable que la force centrale ſeroit alors augmentée de toute celle de projection. Si donc cet accroiſſement de la force centrale eſt de la totalité de celle de projection, dans le cas où l'angle *EMF*, formé par les directions des deux forces, ſeroit infiniment petit, ou infiniment aigu; il eſt évident que cet accroiſſement ne ſera que d'une partie de la force, quand cet angle ſera moins aigu, & ſe rapprochera davantage de l'angle droit. Cet accroiſſement diminuant donc, à meſure que l'angle *EMF*, ſe rapprocheroit davantage de la valeur d'un angle droit, ſeroit zéro, quand l'angle ſeroit de 90 degrés, ce qui eſt le cas du cercle. D'où l'on voit que le cercle, décrit de ſon centre, eſt la ſeule courbe où la force de projection n'ajoute, ni ne retranche à ſa force centrale. Les rayons vecteurs décroîtront donc en tems égal, pendant que l'angle formé par les directions des deux

forces ſera aigu ; puiſqu'une partie de la force de projection ſeroit employée à pouſſer le corps vers ſon centre *F*, de peſanteur ; & par la raiſon contraire, ſi l'angle *EMF*, devient obtus, comme au point *N*, la direction *NQ*, de la force de projection, s'éloignant davantage de la direction *NF*, de la force centrale, & plus que ſi le corps décrivoit un cercle ; une partie de la force de projection ſera employée à pouſſer le corps hors du centre *F*, de mouvement ; ce qui fera croître les rayons vecteurs en tems égal. Ainſi les rayons diminueront, quand l'angle formé par la direction des deux forces ſera aigu, parce qu'alors la force de projection ajoutera à la force centrale. Ils augmenteront quand cet angle ſera obtus, parce qu'alors la force de projection, en pouſſant le corps hors du centre, ajoutera à ſa force centrifuge ; & enfin ces rayons ſeront conſtans, quand cet angle ſera droit, parce qu'alors la force de projection n'ajoutera ni à la force centrale du corps, ni à la force centrifuge, & le mobile, dans ce dernier cas, décrira par conſéquent un cercle.

On voit donc comment une ſeconde force intervient pour accroître ou dimi-

nuer l'action de la force centrale, & que par conſéquent, ce n'eſt point à l'action variable d'une même force, comme M. Newton l'a ſuppoſé, que doit être attribuée cette augmentation, ou diminution de tendance au centre *F*, de peſanteur, quand le corps décrit une autre courbe que le cercle. M. Newton convertit ici en myſtère impénétrable, un effet des plus ſimples, & dont la cauſe ſaute aux yeux. L'effet du décroiſſement, ou de l'accroiſſement des rayons vecteurs eſt attribué à l'action d'un centre *F*, attractif, qui attire le corps en raiſon ſous-doublée de ſa diſtance à ce même centre; & par-là il aſſigne une cauſe myſtérieuſe, impénétrable à l'eſprit humain, à un effet naturel, produit par la ſeule variation de l'angle formé par la direction de la force de projection, avec la direction de la force centrale.

L'on doit obſerver en troiſième lieu, que la vîteſſe de révolution d'un même corps, avec une même force *F*, de projection qui lui auroit été imprimée dans l'origine du mouvement, doit croître quand le rayon vecteur diminuera, & que le corps circuleroit plus près du centre; & décroître au contraire quand ce rayon s'a-

longera, & que le corps circuleroit plus loin du centre de ſon mouvement; ce qui eſt une vérité évidente par elle-même, & qui n'a beſoin que d'être expoſée pour être ſentie.

De ces trois Obſervations : ſavoir, 1°, que la ſomme des forces centripète & centrifuge eſt toujours une quantité conſtante, lorſque le corps circule autour de ſon centre de peſanteur; 2°, Que l'augmentation ou la diminution de la force qui pouſſe le corps au centre, eſt un effet de la force de projection; 3°, Et que le corps circule plus vîte, ou plus lentement, avec une même force de projection F, imprimée dans l'origine du mouvement, ſuivant qu'il ſeroit plus près ou plus loin de ce même centre. De ces trois Obſervations, dis-je, il réſulte que le corps ne pourra décrire qu'une ellipſe par l'un de ſes foyers, lorſque la force de projection AD, qui lui ſeroit imprimée ſeroit moindre, ou plus grande que celle qui ſeroit requiſe pour qu'il pût décrire un cercle, autour de ſon centre F, de peſanteur; car tout corps qui recevroit, par exemple, moins de vîteſſe que celle qui ſeroit requiſe pour qu'il pût décrire un cercle, n'auroit qu'une vîteſſe moindre

que celle qu'il auroit acquiſe après être tombé de la moitié de la hauteur, par exemple, AF, qui le ſépareroit de ſon centre F, de tendance ; mais en rapprochant ſucceſſivement le centre F, de tendance de ce corps, il arriveroit qu'on pourroit le placer dans un point C, où après avoir parcouru la moitié du rayon moindre AC, ce corps auroit acquis, à cette diſtance, une vîteſſe égale à celle qui lui auroit été imprimée, & avec laquelle il pourroit décrire un cercle dont AC, ſeroit le rayon. Ainſi à proportion que la vîteſſe qui auroit été imprimée au mobile ſeroit ſuppoſée moindre, à proportion le point C, autour duquel il devroit circuler pour pouvoir décrire un cercle, avec cette vîteſſe imprimée, ſe rapprocheroit du corps A, & s'éloigneroit du point F. Par conſéquent une moindre vîteſſe imprimée au corps annonceroit toujours que le corps ſeroit trop éloigné de ſon centre F, de peſanteur pour pouvoir décrire un cercle autour de ce centre ; & ce ſeroit le contraire ſi la vîteſſe imprimée au corps étoit plus grande que celle qui ſeroit requiſe pour qu'il pût décrire la même courbe autour de ce centre.

Suppoſons donc un axe AB, dont

C, ſeroit le point du milieu. Si le corps décrivoit un cercle autour de C, il auroit une vîteſſe égale à celle qu'il auroit après être tombé de la moitié de AC; & ſi l'on exprimoit ſa force centripète par le rayon AC, qui répreſenteroit l'eſpace que cette force lui auroit fait parcourir dans un tems t; ſa force centrifuge qui, dans ce cas, ſeroit égale à ſa force centripète, pourroit s'exprimer auſſi par le rayon $CB = AC$, & la ſomme des deux forces par $CB + AC$.

Mais ſi le corps, circulant autour d'un point F, ne décrit point un cercle autour de ce point, ce ſera une preuve qu'il aura reçu moins ou plus de vîteſſe qu'il ne faudroit pour qu'il pût le décrire. Or la ſomme $CB + AC$, des forces, ſeroit toujours la même, ſoit autour du point C, ſoit autour du point F; puiſque ſi d'une part le mobile en A, ayant moins de vîteſſe de révolution, & par conſéquent moins de force centrifuge que s'il décrivoit un cercle autour de C, & le corps ſe trouvant moins ſoutenu au-deſſus du centre que s'il décrivoit un cercle, peſera par conſéquent d'autant plus ſur le même centre; & ſa force centripète ſe trouvera augmentée de toute la quantité dont

ſa force centrifuge ſeroit diminuée : d'autant plus que, dans ce cas, l'angle formé par la direction des deux forces eſt aigu en allant de *A* en *B*, & qu'alors la force de projection ajoute à la force centripète ce qu'elle retranche préciſément de la force centrifuge. Ainſi la ſomme *AC*+*CB*, des deux forces ſera toujours la même, ſoit que le corps décrive un cercle autour de *C*, ou une courbe quelconque autour de *F*.

Si donc les forces centripète & centrifuge, quand le corps étoit ſuppoſé décrire un cercle autour de *C*, étoient au point *A*, dans le rapport de *AC*, à *CB*, qui eſt un rapport d'égalité, elles ſeront dans le rapport de *AF*, à *FB*, quand le corps décrira une autre courbe autour de *F*; puiſque d'une part la ſomme *AF*+*FB*, des deux forces, doit toujours être égale à *AC*+*CB*, & que d'autre part la partie *CF*, qui ſeroit retranchée de la force centrifuge *CB*, doit être ajoutée à la force centripète *AC*.

Delà il ſuit que ſi l'on nomme *D*, l'axe *AB*, & que l'on exprime par le rayon vecteur *R*, pris dans un point quelconque de la courbe, l'une des deux forces, ou l'eſpace qu'elle feroit parcourir dans un

tems t; l'autre force, ou l'eſpace qu'elle feroit parcourir, dans le même tems, ſera toujours $D - R$. Ce qui eſt la propriété caractériſtique de l'ellipſe; puiſque la ſomme des deux rayons vecteurs $R + D - R = D$, menés par les deux foyers de la courbe, eſt toujours égale au grand axe D, de l'ellipſe. L'on voit que cette ellipſe ne différe en rien, de l'ellipſe qui ſeroit décrite par les deux foyers f, F, à cauſe que l'action du foyer f, eſt réunie à l'action du foyer principal F, & que le rayon vecteur ſe raccourcit ou s'alonge, par l'action combinée des deux forces, autour du foyer principal F, préciſément comme il arriveroit ſi le corps étoit ſuppoſé décrire cette courbe, par le moyen d'un fil tendu FM, fM, dont les deux extrémités ſeroient attachées aux deux foyers f, F, à la maniere de l'ovale, dite du *Jardinier*, comme cela devoit être en effet. On voit l'extrême facilité avec laquelle on démontre la génération du mouvement elliptique, & le rapport même des forces centripète & centrifuge à tous les points de l'ellipſe décrite; car la ſomme des deux forces étant exprimée par le grand axe D, de la courbe, & l'une des forces par le rayon vecteur R, l'autre force eſt tou-

jours $D - R$. D'où il ſuit que les deux forces ſont entr'elles, à tous les points de la courbe décrite, comme les diſtances du corps aux deux foyers de cette courbe, & les aires décrites par un même rayon vecteur, toujours proportionnelles aux tems employés à les décrire; puiſque ces aires étant l'effet d'une même ſomme de forces, ne peuvent qu'être égales en tems égal, & doubles, triples, quadruples.... &c. dans un tems double, triple, quadruple.. &c.

Il n'y a point de loi dont la vérité fût plus importante à démontrer, dans la théorie des forces centrales, que celle de la conſtance de la ſomme des forces centripète & centrifuge de tout corps qui ſeroit ſuppoſé circuler autour de ſon centre de peſanteur, & de l'augmentation ou diminution de l'une de ces forces, de la quantité préciſément dont l'autre force diminueroit, ou augmenteroit; car cette loi ſeule fait connoître quelles ſont les courbes qui peuvent être décrites autour d'un point fixe, & celles qui ne peuvent pas l'être.

En effet le corps étant ſuppoſé décrire une courbe quelconque, autour d'un point F, ſon centre de peſanteur; ce corps aura néceſſairement une force centripète p,

&

& une force centrifuge f, dont la ſomme ſera toujours une quantité conſtante D, par la loi qu'on vient de démontrer. L'on aura donc, à tous les points de la courbe décrite, $P+f=D$. D'où on tirera : $P=D-f$, & $f=D-P$; mais j'obſerve que la quantité $P+f$, où la ſomme des deux forces conſidérées dans un tems t, fini, ne pourra être qu'une quantité finie ; c'eſt-à-dire, que les deux forces enſemble ne pourroient faire parcourir au corps qu'un eſpace D, fini, dans un tems t, fini, & qu'ainſi en exprimant ces deux forces par l'eſpace D, qu'elles feroient enſemble parcourir au corps, en ſuppoſant qu'elles agiroient du même côté, cet eſpace D, ſera toujours fini. On pourra donc déterminer ſur une ligne finie, un eſpace AB, que les deux forces enſemble feroïent parcourir au corps, dans un tems fini t: & ſi cette ligne paſſe par le centre F, de peſanteur du corps, elle ſera toujours l'axe de la courbe que ce corps décrira, ce qui eſt évident, puiſque la force centrifuge f, feroit parcourir au corps l'eſpace FB, dans le même tems que la force centripète P, lui feroit décrire l'intervalle AF; car les deux forces enſemble ſont ſuppoſées faire parcourir dans un tems t,

tout l'eſpace AB; & la force centripète P, feroit ſeule parcourir de l'eſpace total AB; la partie AF, de cet eſpace qui ſépareroit le corps de ſon centre F, de peſanteur, tandis que la force centrifuge lui feroit décrire, dans le même tems, l'eſpace FC, qui éloigneroit le corps de ce même centre.

Donc la ligne finie AB, ſera l'axe de la courbe que le corps décrira, & cet axe étant fini, la courbe décrite ne pourra être qu'une courbe rentrante en elle-même; un cercle, dans le cas où les deux forces AF, FC, ſeroient égales, & une ellipſe, plus ou moins excentrique, dans le cas de l'inégalité des deux forces.

Obſervons encore que cette ellipſe ne pourra être décrite que par l'un de ſes foyers, attendu l'équation, $r = D - R$ qui réſulte de la loi de la conſtance de la ſomme des forces centrales, qui exige que le centre de peſanteur du corps ſoit ſitué dans un point tel que la ſomme $r + R$, des rayons vecteurs, repréſentant la ſomme des forces, ſoit toujours égale à l'axe principal D, de la courbe; & qu'ainſi le cas d'une ellipſe décrite par ſon centre, dont a parlé M. Newton, eſt purement chimérique, ainſi que celui d'un cercle

décrit de tout autre point que de ſon centre; car l'équation $r=D-R$, dans le cas d'un cercle décrit, ſe réduit à $2r=D$, & à $r=\frac{D}{2}$, à cauſe de l'égalité des rayons vecteurs $R+r$; puiſque dans le cas où ces rayons ne ſeroient pas égaux, l'équation $r=D-R$ ſeroit à l'ellipſe, décrite par l'un de ſes foyers, & nullement au cercle.

Il eſt donc inconteſtablement démontré que toutes les courbes qu'il eſt poſſible qu'un corps décrive, autour d'un ſeul & même point fixe, ſe réduiſent au cercle décrit par ſon centre, & à l'ellipſe décrite par l'un de ſes foyers; & que la génération de toute autre eſpece de courbes eſt chimérique, fauſſe & abſurde, ainſi que les loix d'où on les déduit. L'équation, à toutes les courbes poſſibles qu'un corps pourroit décrire autour d'un point, étant, comme il vient d'être démontré, $r=D-R$. Dans le cas de la parabole, par exemple, l'on auroit: $R+r=D$, qui ſe réduiroit à $R=D$, à cauſe que le rayon vecteur r, terminé au premier foyer de la parabole, ſeroit nul à l'égard du rayon vecteur R, qui ſe termineroit au ſecond foyer, infiniment diſtant du premier.

Par conſéquent la tendance du corps ne ſeroit point au premier foyer de la parabole, comme M. Newton a ſuppoſé qu'il pouvoit arriver, mais au ſecond foyer, infiniment diſtant du corps.

Voilà donc une foule de démonſtrations différentes qui concourent toutes à établir les mêmes vérités.

L'expreſſion de la force accélératrice dans l'ellipſe étant : $\frac{c^2}{2r} \pm R \mp r$, ainſi qu'il a été prouvé, ſuivant que cette force ſeroit conſidérée dans le tems où le rayon vecteur R, croîtroit, ou décroîtroit; il s'enſuit que l'effet de la force de projection ſur le corps, quand l'angle formé par les directions des deux forces ſeroit aigu, ſeroit toujours $R - r$, ou $-R + r$, quand cet angle ſeroit obtus, comme dans le retour du corps au point du départ. Le reſte de la force, exprimé par $\frac{c^2}{2r}$, marque toujours l'eſpace que la force accélératrice feroit décrire au corps, dans le cas où il parcourroit un cercle au point où il ſe trouve.

NEUVIEME OBSERVATION.

Sur la génération du Mouvement parabolique.

SI un corps A, peſant ſur un centre T, de peſanteur, infiniment éloigné, eſt frappé par une force ABC (*Fig.* 19), perpendiculaire à celle de la gravité du corps, ce corps, par ces forces combinées, décrira la parabole ADE.

Car nommons $AB = MD\ (y)$, $AC = NE\ (Y)$, $AM\ (x)$, $AN\ (X)$; & que le corps dans un tems t, employé à décrire l'eſpace AB, ſoit ſuppoſé tomber par le ſeul effet de la force accélératrice de la hauteur $BD = AM$, & dans un tems T, employé à décrire l'eſpace AC, de la hauteur $CE = AN$. Les eſpaces parcourus, étant comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'on aura; $x : X :: y^2 : Y^2$; c'eſt-à-dire, les abſciſſes, ou eſpaces parcourus AM, AN, comme les quarrés des ordonnées MD, NE. Donc le corps décrira, la parabole ADE.

Suppoſons actuellement que le corps décrive, par l'un de ſes foyers F, une ellip-

ſe dont le paramètre ſeroit p, & l'axe principal $2a$. L'équation à cette courbe ſeroit : $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$.

Or, dans le cas où l'on voudroit tranſformer ce mouvement elliptique autour de l'un des foyers F, de la courbe, en mouvement parabolique, autour du même foyer F, il eſt clair qu'il faudroit éloigner le foyer, ou centre de peſanteur F, du corps à l'infini, afin que l'équation $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$, fût réduite à l'équation $y^2 = px$, qui eſt à la parabole, par la diſparition du terme $\frac{px^2}{2a}$, parce que quand le foyer F s'éloigne à l'infini, l'axe $2a = \infty$, & dès lors le terme $\frac{px^2}{2a}$, devient nul à l'égard de px. Il n'exiſte donc point d'autre moyen de faire décrire à un corps une parabole, autour de ſon centre F, de peſanteur, qu'en éloignant ce centre à l'infini. La génération de cette courbe, autour du premier foyer de la parabole, preſcrite par M. Newton, eſt donc fauſſe & abſurde, puiſque le corps y circuleroit autour d'un centre dont il ne ſeroit qu'à une diſtance finie, au lieu de ſe mouvoir autour d'un centre infiniment diſtant.

On doit obſerver que le cas dont il s'agit ici, du mouvement parabolique d'un corps, eſt purement métaphyſique; puiſque ce mouvement ne pourroit avoir lieu que dans le cas où le corps ſeroit ſuppoſé placé à une diſtance infinie de ſon centre de peſanteur, ce qui eſt une ſuppoſition au fond chimérique, & qui ne peut jamais avoir lieu. D'où il réſulte qu'un mobile ne peut jamais décrire, autour de ſon centre de peſanteur, qu'un cercle, ou une ellipſe, ainſi qu'il a été démontré; & que c'eſt par conſéquent à la génération de ces deux courbes que les loix des forces centrales doivent ſe réduire; en ſuppoſant néanmoins toujours que la force de la gravité ne retrancheroit jamais rien à l'action tangentielle; car dans le cas où l'action tangentielle iroit en diminuant, comme il arriveroit en effet, ainſi qu'on le prouvera bientôt, la courbe décrite, par un corps de dimenſions finies, qui ſeroit mû autour de ſon centre de peſanteur, ſans être ſoutenu, ne pourroit être qu'une ſpirale, puiſqu'il eſt évident que, dans ce cas, le mouvement du corps ſe termineroit au centre de tendance.

EXAMEN critique du jugement de l'Académie Royale des Sciences, ſur quatre propoſitions ſur les Loix des Forces centrales, ſoumiſes au jugement de cette Académie, par l'Auteur des préſentes Obſervations.

DANS le deſſein d'engager les Géomètres à porter la théorie des loix des forces centrales au même degré de certitude & d'évidence que les autres parties des Mathématiques, & d'en écarter tout ce qui y avoit été introduit d'inexact & de défectueux, l'Auteur de cet Ouvrage a cru qu'un moyen d'y parvenir, étoit de ſoumettre au jugement de l'Académie Royale des Sciences pluſieurs queſtions ſur cette partie importante des Mathématiques, qu'il a même fini par réduire à quatre propoſitions fondamentales qui lui ont paru les plus exactes, & ſuſceptibles d'une démonſtration plus rigoureuſe. L'Académie lui a nommé d'abord pour Commiſſaires MM. Bézout, & du Séjour, auxquels elle a joint par la ſuite MM.

de Condorcet & de Vandermonde. Ces Meſſieurs ont fait deux rapports, adoptés par l'Académie, & ce ſont ces deux rapports qu'on s'eſt propoſé de diſcuter ici.

La premiere propoſition qui a été préſentée à l'Académie a deux objets : le premier, de déterminer la meſure de la force accélératrice d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre, conſidéré en même tems, comme le centre de peſanteur du corps. L'Auteur a prétendu qu'en nommant r, le rayon du cercle décrit ; C, l'arc quelconque fini, ou infiniment petit, décrit dans un tems t ; la meſure, ou hauteur dont la force accélératrice feroit tomber le corps, pendant le tems t, employé à décrire l'arc C, étoit toujours $\frac{c^2}{2r}$, ou le quarré de l'arc décrit, diviſé par le diamètre du cercle parcouru : voilà le premier objet de la propoſition.

Le ſecond objet de cette propoſition a été de déterminer la meſure de la ſomme des efforts, conſiderés dans la circonférence du cercle parcouru, que doit faire le corps, dans le même tems t, employé à décrire l'arc C, pour ſe retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il auroit tendu à parcourir en décrivant

cet arc; en ſuppoſant que la ſomme de ces efforts auroit été employée à lui faire décrire un eſpace; & l'Auteur a prétendu que ſi le corps avoit en effet employé à décrire un eſpace, tout l'effort qu'il auroit fait pour ſe retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il auroit tendu à parcourir, en décrivant l'arc C, & pendant le tems t; cet eſpace, à la fin du même tems t, ſeroit toujours $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$, & que c'étoit, par conſéquent par cet eſpace, & non par l'eſpace $\frac{c^2}{2r}$, qu'il falloit meſurer la force de la peſanteur du corps, c'eſt-à-dire, cette force qui retiroit à tout inſtant le mobile de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendoit à parcourir, & qui faiſoit replier ces tangentes ſur la circonférence du cercle décrit.

L'Auteur ayant démontré en toute rigueur la légitimité de la meſure $\frac{c^2}{2r}$, de la force accélératrice, & la légitimité de la meſure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$, de la peſanteur proprement dite, dans ſes cinquième & ſixième Obſervations; n'a rien a ajouter à ce qu'il en a dit. Il lui ſuffira donc d'exa-

miner ſi le rapport des Commiſſaires de l'Académie eſt bien conforme à l'eſprit de ces démonſtrations.

Sur la premiere partie de cette propoſition, l'avis des Commiſſaires a été d'attribuer deux meſures à la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle; ſavoir $\frac{c^2}{2r}$, lorſque le cercle ſeroit *conſidéré comme courbe rigoureuſe*, & $\frac{c^2}{r}$, lorſqu'on l'enviſageroit comme *courbe poligone*; c'eſt-à-dire, comme poligone d'une infinité de côtés infiniment petits. *Ces deux meſures*, diſent-ils, *ſont également légitimes*, & *l'une n'exclut point l'autre*. L'idée de ces deux meſures, qui different de moitié, donnée à la même force, a été ſuggérée à Meſſieurs les Commiſſaires, par le deſir très-louable de concilier les deux opinions qui s'étoient élevées parmi les Géomètres, au ſujet de la meſure de la force centrale du cercle; les uns ayant prétendu que cette meſure étoit $\frac{c^2}{2r}$, & les autres $\frac{c^2}{r}$, ce qui fait une différence de moitié. Pour parvenir donc à opérer une conciliation ſi deſirable, Meſſieurs les Commiſſaires ont été obligés de créer un ſyſtême;

ſavoir, *que les Géomètres avoient toujours été d'accord ſur cet objet*, en adoptant les deux meſures attribuées à la force centrale du cercle, ſuivant qu'il ſeroit conſidéré comme courbe rigoureuſe, ou comme poligone d'une infinité de côtés. Et l'Auteur des propoſitions prétend que la meſure $\frac{c^2}{r}$, attribuée à la force centrale du cercle, ne réſulte pas de ce que le cercle ſeroit conſidéré comme poligone; que dans ce cas, comme dans celui où il ſeroit regardé comme courbe rigoureuſe, la meſure de la force accélératrice étoit toujours dans le cercle $\frac{c^2}{2r}$, mais que cette meſure dérivoit uniquement de la conſidération de l'effet ou de la vîteſſe que la force accélératrice auroit produit ſur le corps, à la fin d'un tems $t = 1$, par lequel le corps pourroit parcourir uniformément un eſpace double dans le même tems; effet par lequel la force étoit repréſentée, par ceux des Géomètres qui aſſignoient $\frac{c^2}{r}$ pour meſure de la force; au lieu que ceux qui ne lui donnoient pour meſure que $\frac{c^2}{2r}$, n'exprimoient cette force que par la moitié de la vîteſſe acquiſe à la fin du même tems $t = 1$.

Pour prouver la vérité de cette propoſition, il ſuffit de tranſcrire quelques lignes de la lettre même que M. Bézout écrivit à l'Auteur, le 4 Juillet 1772.

« Les Géomètres, dit-il, ſont dans l'u-
» ſage très-permis de meſurer l'intenſité
» de la force centrale *par la vîteſſe qu'elle*
» *peut faire naître dans le mobile, pendant*
» *la portion de tems qu'on eſt convenu de*
» *prendre pour unité.* Si donc h, eſt la hau-
» teur dont la force centrale peut faire deſ-
» cendre un mobile, pendant cette unité
» de tems, $2h$ *ſera l'eſpace qu'il ſeroit ca-*
» *pable de décrire uniformément, pendant*
» *cette même unité de tems;* & $\frac{2h}{1}$ *ſera par*
» *conſéquent la vîteſſe qu'aura engendrée la*
» *force centrale.* Ce ſera ce *que les Géomè-*
» *tres prennent pour meſure de la force cen-*
» *trale.* Ainſi en nommant f, cette meſure,
» on aura $f = \frac{2h}{1} = 2h$; ſubſtituez, dans
» cette équation, au lieu de h, la valeur
» que vous lui ſuppoſez, & *que tous les*
» *Géomètres lui ont toujours ſuppoſée;*
» c'eſt-à-dire, $\frac{c^2}{2r} = h$, & vous aurez $f =$
» $\frac{cc}{r}$. Vous voyez, qu'en partant de vos
» principes, $\frac{c^2}{r}$, eſt en effet la meſure de la

» force centrale, lorſque l'on convient de » *meſurer cette force par la vîteſſe qu'elle eſt* » *capable d'engendrer dans un tems donné*».

Rien de plus clair que cette lettre de M. Bézout; il ſuppoſe d'abord que h, eſt la hauteur dont la force centrale auroit fait deſcendre un mobile pendant un tems $t = 1$; & c'eſt préciſément par cette hauteur, ou eſpace parcouru h, dans ce même tems $t = 1$, que ceux des Géomètres qui donnent pour meſure à la force $\frac{c^2}{2r} = h$, expriment cette meſure; tandis que les autres Géomètres lui donnent pour meſure le double de cet eſpace ou $\frac{c^2}{r} = 2h$, qui eſt en effet non l'eſpace que le corps auroit réellement parcouru dans le tems $t = 1$, en vertu de l'action de la force ſur le corps, pendant le même tems; mais ſeulement celui qu'elle auroit rendu *capable de décrire uniformément* pendant le même tems $t = 1$, & ſeulement à la fin de ce tems, & pendant le cours du tems ſuivant; enſorte que c'eſt toujours par un eſpace décrit dans un tems $t = 1$, que la force eſt meſurée; mais quand cet eſpace eſt $h = \frac{c^2}{2r}$, il eſt évident qu'il eſt la véritable meſure de la force accélératrice,

qui étant réduite à un mouvement uniforme, ſuivant l'eſprit de la premiere obſervation, ſeroit égale au produit de la moitié $\frac{v}{2}$, de la vîteſſe acquiſe, à la fin du tems $t = 1$, par ce même tems. Ainſi $\frac{v}{2} \times 1, = \frac{v}{2}, = h$, ſera la véritable meſure de la force centrale accélératrice, ou de la force uniforme qui auroit produit le même effet, pendant le même tems, & qui par conſéquent ſeroit égale à la premiere.

Si au contraire la meſure de la force eſt $2h = \frac{c^2}{r}$, il eſt évident qu'on double l'effet produit $h = \frac{c^2}{2r}$; puiſqu'effectivement l'effet produit ſur le corps, pendant le cours du tems $t = 1$, n'eſt pas $2h = \frac{c^2}{r}$, mais $h = \frac{c^2}{2r}$. L'effet $2h = \frac{c^2}{r}$, n'eſt que l'effet que produiroit dans un ſecond tems $t = 1$, une ſomme de vîteſſes que le mobile auroit acquiſe à la fin du premier tems égal, en ſuppoſant encore que le corps ſeroit mû, pendant le ſecond tems, avec cette même ſomme de vîteſſes acquiſe à la fin du premier tems. La force n'eſt donc pas exactement meſurée par $\frac{c^2}{r} = 2h$, puiſ-

qu'elle eſt meſurée, non pas par un effet produit pendant le cours du premier tems, durant lequel ſon action ſur le corps ſeroit conſiderée, mais par un effet à produire dans le ſecond tems, avec une ſomme de vîteſſes acquiſes à la fin du premier tems.

Voilà la véritable origine des deux meſures données à la même force, qui n'a abſolument rien de commun avec cette autre idée que préſente M. Bézout, dans ſa même lettre, du 4 Juillet, touchant la légitimité de ces deux meſures dans le cercle, ſuivant qu'il ſeroit regardé comme courbe rigoureuſe, ou comme courbe poligone, & qu'il a cru devoir appuyer ſur une démonſtration particulière que nous allons examiner.

« Les Géomètres ſont également fondés, & également d'accord avec vos » principes, ajoute-t-il, dans l'application » qu'ils font de cette meſure des forces » centrales, aux mouvemens en ligne courbe. Si l'on avoit une méthode de calcul » qui permît de conſidérer les courbes, » comme courbes rigoureuſes; il n'y a pas » de doute que le petit eſpace *bd* (la flèche) » (*Fig.* 20), dont le mobile eſt ramené à chaque inſtant, ne dût être meſuré dans le

» cercle,

» cercle, par $\frac{c^2}{2r}$; mais dans le cas où *l'on*
» *conſidère la courbe comme un poligone*
» *d'une infinité de côtés, on ſe tromperoit*
» *beaucoup ſi on meſuroit ainſi la quantité*
» *dont le mobile eſt ramené à chaque inſ-*
» *tant.* En effet, dans cette hypothèſe, le
» corps qui vient de décrire le petit côté
» *ea*, tend à décrire la petite ligne *ab=ea*,
» pendant un inſtant égal ; puis donc qu'il
» doit arriver en *d*, la force centrale a
» dû le ramener de la quantité *bd* ; mais
» remarquez que cette quantité *bd*, ne
» doit pas être regardée comme décrite
» d'un mouvement accéléré, comme dans
» la courbe rigoureuſe. Dès que vous re-
» gardez la courbe comme poligone, vous
» impoſez la condition que la force cen-
» trale n'agit qu'à chaque angle du poli-
» gone, & par une impulſion unique.
» Qu'elle y donne toute la vîteſſe que
» dans la courbe rigoureuſe, elle eût don-
» née ſucceſſivement, pendant le tems
» qu'il a fallu pour décrire le petit côté
» *ea*. Or, dans cette ſuppoſition, l'eſpace
» qu'elle fera décrire doit être double de
» celui qui eût été décrit par l'accéléra-
» tion ſucceſſive. Donc, pour que la me-
» ſure que l'on prend ici pour l'effet de

» la force centrale ſoit exacte, il faut que » $b\,d$, ſoit le double de ce que cette force » auroit fait décrire en pareil tems ſur la » courbe rigoureuſe. Or, ſi vous regar- » dez le corps comme mû dans la cour- » be rigoureuſe, & qu'au point, a, vous » imaginiez la tangente $a\,q$; $q\,d$ ſera la pe- » tite quantité dont le corps auroit été » ramené par l'effet ſucceſſif de la force » centrale. Mais vous ſavez que par la na- » ture du cercle, $b\,d$ eſt double de $q\,d$; » vous voyez donc qu'en meſurant la for- » ce centrale par $b\,d$, lorſque la courbe » eſt regardée comme poligone, on fait » abſolument la même choſe que ſi on la » meſuroit par $q\,d$, en conſidérant la cour- » be comme rigoureuſe, & vous voyez » en même tems que les Géomètres ne » pourroient, dans ce même cas, prendre » $q\,d$, pour meſure de la force centrale, » ſans ſe contredire, puiſque par-là ils » regarderoient comme continue une ac- » tion qu'ils ont ſuppoſée interrompue à » des diſtances infiniment petites ».

« Comme nous ſommes convaincus que » ces raiſonnemens ſatisfont pleinement aux » difficultés que vous vous êtes faites ſur » cette matiere & aux différens argumens » que vous avez expoſés dans vos deux

» lettres, nous ne les détaillerons pas da-
» vantage. Nous eſpérons que vous juge-
» rez, ainſi que nous, que tout eſt d'ac-
» cord entre l'eſtimation que vous faites
» avec tous les Géomètres, de la hauteur
» que la force centrale peut faire décrire
» dans un tems donné, & la meſure que
» les Géomètres prennent pour la force
» centrale. C'eſt le jugement que nous
» croyons devoir propoſer à l'Académie,
» ſi après la lecture de cette lettre, vous
» deſirez que le rapport en ſoit fait à cette
» Compagnie ».

L'Auteur des propoſitions, ſur la ſim-
ple lecture de cette lettre de M. Bézout,
jugea que les raiſonnemens qu'elle con-
tient ne pouvoient aboutir qu'à un paralo-
giſme, fondé ſur cet argument auſſi ſim-
ple qu'exact. Le cercle étant toujours la
même courbe, ſoit qu'on le conſidére
comme poligone, ou comme courbe ri-
goureuſe, il en réſulte inconteſtablement
que la force centrale du corps qui ſeroit
ſuppoſé le décrire, doit être la même. Et
bien loin que ce ſoit là le ſentiment des
Géomètres, comme M. Bézout veut le
faire entendre, c'eſt qu'au contraire tous
ceux à qui on en a parlé ont rejetté cette
idée, qu'on ne trouve d'ailleurs dans au-

cun Auteur connu ; ainſi cette aſſertion de M. Bézout, *que dans le cas où l'on conſidere la courbe comme un poligone d'une infinité de côtés, on ſe tromperoit beaucoup ſi on meſuroit par* b d, *la quantité dont le mobile eſt ramené à chaque inſtant*, ne peut être exacte ; car en ſe prêtant même à l'hypothèſe de la deſcription du cercle, conſidéré comme poligone d'une infinité de côtés, laquelle ne peut être admiſe, comme on le verra par la ſuite, lorſqu'il s'agit de la deſcription réelle & phyſique de cette courbe par un corps de dimenſions finies, il doit s'enſuivre toujours que ſi *b d*, eſt la meſure de la force quand le corps eſt ſuppoſé décrire la courbe rigoureuſe, cette quantité ſera également ſa meſure quand il décrira la même courbe, conſidérée comme poligone. Il eſt étonnant qu'un Géomètre de l'ordre de M. Bézout, ait pu tomber ici dans une ſemblable mépriſe, & plus étonnant encore qu'il ait perſiſté dans un paralogiſme, dans lequel l'Auteur des propoſitions, par pluſieurs de ſes lettres, lui a démontré qu'il tomboit ; ce paralogiſme ſe trouve, 1°, dans la ſuppoſition même que fait M. Bézout, des deux quantités différentes *b d*, *q d*, dont il prétend que le corps ſeroit

ramené, dans le cours d'un même tems t, en décrivant la même courbe ſous les deux dénominations de courbe rigoureuſe, & de courbe poligone; comme ſi ces dénominations pouvoient rien changer à la nature des choſes. 2°. A ne pas tenir compte du nombre double d'impulſions que le corps doit néceſſairement recevoir, dans le cours d'un même tems t, en parcourant la courbe, conſidérée comme rigoureuſe, de celui qu'il recevroit dans le même tems, dans la courbe regardée comme poligone. Et en effet, puiſque, ſuivant M. Bézout même, la *ſuppoſition de la courbe poligone impoſe la condition que la force centrale n'agit qu'à chaque angle du poligone, & par une impulſion unique..... que ſon action eſt interrompue à des diſtances infiniment petites*, & pendant tout le tems que le corps décriroit chaque côté du poligone; y ayant donc autant de côtés que d'angles dans ce poligone; c'eſt-à-dire, autant de parties où la force agiroit, que de parties où elle n'agiroit pas. La force agiroit donc moitié moins ſouvent dans le cercle, conſidéré comme poligone, qu'elle ne feroit dans le cercle, conſidéré comme courbe rigoureuſe. Le corps en

parcourant le cercle, conſidéré comme courbe rigoureuſe, recevroit donc dans le cours d'un même tems t, un nombre n, d'impulſions, double de celui qu'il recevroit, dans le même tems, en décrivant la même courbe conſidérée comme poligone. Mais la force de chaque impulſion, dans ce dernier cas de la courbe poligone, étant double, ſuivant la propoſition même de M. Bézout, de la force de celles que le corps recevroit dans la courbe rigoureuſe, puiſqu'elle imprimeroit une vîteſſe double ; il en réſulte bien préciſément que dans le cours d'un même tems t, fini, ou infiniment petit, le corps doit parcourir le même eſpace, ſoit dans la courbe poligone, ſoit dans la courbe rigoureuſe ; car nommant p, la force des impulſions, dans la courbe rigoureuſe ; n, leur nombre dans le cours d'un tems t : la force imprimée au corps, pendant ce tems, ſeroit np, & dans la courbe poligone la force imprimée dans le même tems, ſeroit $2p \times \frac{n}{2} = np$. Ainſi la force imprimée, dans le même tems, étant la même dans la courbe poligone, & dans la courbe rigoureuſe, il s'enſuit démonſtrativement que ce ſera par la même quan-

ité *bd*, qu'il faudra l'exprimer dans ces deux cas.

Le paralogiſme de la propoſition de M. Bézout, que tout Géomètre appercevra par ſon ſeul énoncé, eſt donc rendu évident.

M. Bézout, à qui ce paralogiſme avoit été reproché, avoit gardé le ſilence pendant quelque tems. Mais l'Auteur des propoſitions ayant encore inſiſté ſur cette démonſtration, M. Bézout lui écrivit le 13 Juillet, en ces termes : « Vous revenez » encore, Monſieur, dans votre derniere » lettre, ſur une idée que nous jugeons » n'être nullement exacte, & ſur laquelle » *nous n'avions gardé le ſilence* que pour » éviter *la diſcution inutile* dont il s'agit. » Vous penſez que dans la courbe poligo- » ne, la force centrale agit moitié moins » ſouvent que dans la courbe rigoureuſe ; » & il paroît que c'eſt par cette eſtima- » tion que vous vous êtes enfin rapproché » des Géomètres, *ſur la meſure de la for-* » *ce centrale dans la courbe poligone.* Nous » ne pouvons vous diſſimuler que le motif » de votre acceſſion, au ſentiment des Géo- » mètres, ne ſeroit point avoué par aucun » d'entr'eux ».

Voilà comment M. Bézout s'eſt juſtifié

un paralogisme qui lui étoit reproché ; & comment il s'en juſtifie encore dans ſon rapport à l'Académie, où il ne néglige pas de faire ſonner aſſez haut une contradiction auſſi légère que de courte durée, que le deſir très-vif de ſe rapprocher de ſon ſentiment, & ſa propoſition même avoient occaſionnée. L'Auteur avoit penſé que la propoſition que M. Bézout lui avoit adreſſée étoit au moins exacte à quelques égards, & qu'il pouvoit être vrai qu'au premier inſtant du mouvement, la force centrale, conſidérée dans la courbe poligone, pût être exprimée par bd, & par qd, lorſqu'on l'enviſageroit dans la courbe rigoureuſe ; & en conſéquence il avoit très-mal à propos, accordé à M. Bézout, ſur la foi de ſa propoſition même, que l'on pouvoit, relativement à cet inſtant ſeulement, & nullement dans une ſomme d'inſtans, exprimer la force centrale dans la courbe rigoureuſe, par $qd = \frac{c^2}{2r}$, & dans la courbe poligone, par le double $bd = \frac{c^2}{r}$. Mais il avoit toujours ſoutenu qu'à la fin du tems, l'eſpace parcouru, dans les deux ſuppoſitions, devoit être égal, ce qui ramenoit toujours la meſure $\frac{c^2}{2r}$, pour l'unique

meſure donnée à la force dans ces deux même cas.

Il eſt aſſez ſingulier que M. Bézout affecte de relever une contradiction qui n'en eſt point une dans le fond, & qu'il auroit lui-même occaſionnée. En examinant de plus près ſa propoſition, l'Auteur s'eſt apperçu qu'elle manquoit de juſteſſe à toutes ſortes d'égards, & qu'il avoit eu tort d'accorder à M. Bézout, le peu même qu'il lui avoit accordé. En effet, il a trouvé que la tangente à mener au cercle devoit être tirée au point b, & non du point q, milieu de bd; & que par conſéquent le mobile devoit être ramené de la même quantité bd, ſoit dans la courbe rigoureuſe, ſoit dans la courbe poligone, comme cela devoit être en effet.

Qu'un mobile en e, ſoit ſuppoſé parcourir le côté infiniment petit ea, du poligone circulaire; ce corps, en pareil tems, décriroit la petite droite $ab = ea$: menant du point b, & par le centre c, la ſecante bdQ, ſa partie extérieure bd, exprimera la quantité dont le mobile ſe ſeroit écarté du centre ou la force centrifuge du corps.

Soit conçue une tangente bg, menée du point b; la petite ligne bd, ſera éga-

lement la quantité dont le mobile s'écarteroit du centre, ſi, au lieu de parcourir la droite ob, il décrivoit la tangente gb, qui lui eſt ſenſiblement égale, à raiſon de l'infinie petiteſſe de l'angle obg qui permet de conſidérer le triangle ogb, comme un triangle rectangle ſenſiblement iſoſcelle, & par conſéquent les deux côtés ob, gb, comme ſenſiblement égaux. Ainſi le corps parcourant avec la même vîteſſe les droites égales ob, gb, arriveroit au même inſtant au point b, & s'écarteroit du centre, par ces deux routes, de la même quantité db; c'eſt-à-dire, que ſa force centrifuge ſeroit exactement la même, ſoit qu'il fût ſuppoſé décrire, dans la courbe rigoureuſe, la tangente gb; ou la droite égale ob, dans la courbe poligone. Or le mobile devant être ramené par la force centrale, de la même quantité bd, dans la courbe rigoureuſe, & dans la courbe poligone; il s'enſuit que bd, ſera la meſure unique de la force centrale dans ces deux hypothèſes, & que par conſéquent qd, ne ſera point la meſure de cette force, dans le cas de la courbe rigoureuſe, comme M. Bézout le prétend. Et en effet, $bd = \frac{bg \times bg}{2dc} = \frac{2ea \times ea}{2dc}$

$= \frac{ea \times ea}{dc}$, égalité qui démontre que l'on a deux manieres d'exprimer la force centrale d'un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire l'arc gd; ſavoir, $\frac{bg \times bg}{2dc}$, & $\frac{ea \times ea}{dc}$, parce que, dans ce cas particulier, la tangente gb, eſt moyenne proportionnelle entre le côté infiniment petit ea, du poligone infini-latéral, & le double eb, de ce même côté; puiſqu'en effet, $\overline{gb}^2 = 2\overline{ea}^2$. D'où ſuit l'analogie : $ea : gb :: gb : 2ea$.

Si l'on ſubſtitue actuellement l'arc gd, à ſa tangente gb, & l'arc ega, à ſa corde ea, ce qui eſt permis, lorſque ces arcs ſont ſuppoſés infiniment petits; & ſi l'on nomme c, l'arc gd, & a, l'arc ea, l'on aura l'analogie $a : c :: c : 2a$. D'où ſuivroit l'égalité $2a^2 = c^2$, & cette autre égalité : $\frac{c^2}{2r} = \frac{2a^2}{2r} = \frac{a^2}{r} = bd$, ce qui démontre que la flèche bd, eſt la meſure unique de la force centrale du corps, ſoit que cette flèche ou meſure ſoit déterminée par le quarré de l'arc ea, diviſé par le rayon, ou par le quarré de l'arc gd, diviſé par le diamètre; & ſoit que le corps ſoit ſuppoſé parcourir le poligone infini-

latéral ea, ou la courbe rigoureuſe gb, ou gd.

Nombre de Géomètres ont été induits en erreur, par l'expreſſion ci-deſſus $\frac{a^2}{r}$ de la force centrale du cercle. Ils en ont conclu que la meſure de cette force étoit toujours, & dans tous les cas, le quarré de l'arc décrit, diviſé par le rayon, & non par le diamètre du cercle parcouru. Ils n'ont pas fait attention que cette expreſſion $\frac{a^2}{r}$ étoit égale à $\frac{c^2}{2r}$, & n'exprimoit pas la hauteur dont le mobile tomberoit pendant le tems t, employé à décrire la corde ea, ou l'arc ega; mais celle dont il ſeroit abaiſſé, dans un tems plus long T, employé à décrire la tangente gb, ou arc plus grands gd; enſorte que c'eſt la flèche bd, relative à la génération de l'arc gd, & au tems employé à le décrire, qui ſe trouve avoir ici deux expreſſions différentes qui ont la même valeur, $\frac{a^2}{r}$, & $\frac{c^2}{2r}$; ce qui veut dire, que ſi le mobile tomboit pendant tout le tems T, employé à décrire l'arc gd, la hauteur dont il ſeroit abaiſſé, ſeroit ou $\frac{a^2}{r}$, ou $\frac{c^2}{2r}$, qui ſont deux quantités égales dans ce cas, & les ex-

preſſions de la même flèche bd : mais ſi le mobile tomboit pendant tout le tems plus court t, employé à décrire l'arc moindre ega, il eſt évident qu'il tomberoit d'une hauteur moindre que la flèche $bd = \frac{a^2}{r} = \frac{c^2}{2r}$; & que par conſéquent, cette flèche ne peut être la meſure de la hauteur dont le mobile tomberoit dans le tems t, employé à décrire l'arc ega; ceci eſt de la plus grande évidence. Il eſt d'abord inconteſtable que la flèche bd, eſt la hauteur dont la force centrale feroit tomber le corps pendant le cours du tems T, employé à décrire l'arc gd. Donc cette même flèche ne peut être en même tems la hauteur dont la même force feroit tomber le corps pendant le tems plus court t, employé à décrire l'arc moindre ega. Ainſi la flèche bd, ne doit être conſidérée comme meſure de la force centrale du corps, qu'autant que ce corps ſeroit ſuppoſé décrire un arc gd, dans un tems T, & non point un arc moindre ega, dans un tems plus court t. D'où il ſuit que l'expreſſion réelle de la force accélératrice eſt toujours, dans le cercle, $\frac{c^2}{2r}$; & que quand on trouve pour expreſſion de la force, $\frac{a^2}{r}$, cette expreſſion, comme dans le cas

préſent, marque toujours que la hauteur exprimée par $\frac{a^2}{r}$, eſt relative, non pas à la génération de l'arc a, ni au tems employé à le décrire, mais à la génération d'un autre arc c, & au tems employé à le parcourir; cet arc c, étant toujours moyen proportionnel entre l'arc a, & ſon double $2a$.

M. Bézout ſuppoſe encore très-gratuitement que les Géomètres ont toujours été d'accord ſur la meſure de la force centrale du cercle, même quand les uns l'exprimoient par $\frac{c^2}{2r}$, & les autres par $\frac{c^2}{r}$. Suivant lui, c'étoit la meſure de la force, conſidérée dans la courbe rigoureuſe, qu'ils avoient tous voulu exprimer par $\frac{c^2}{2r}$, & la meſure $\frac{c^2}{r}$ de la même force qu'ils avoient également tous en vue d'exprimer dans la courbe poligone; enſorte qu'il ſuivroit de ce ſyſtême que le centre de réunion de tous les Géomètres ſeroit le paralogiſme même de cette propoſition de M. Bézout.

On ne veut citer à M. Bézout que deux traits, conſignés dans des lettres, écrites par des Géomètres de ſon rang;

c'eſt-à-dire, par des Géomètres du premier ordre au ſujet de la queſtion préſente : l'un adreſſant à l'Auteur la propoſition même qu'on vient de diſcuter, termine ſa lettre par ces paroles : « Vous voyez que l'effet de la force centrale eſt » proportionnel au quarré de la vîteſſe, » diviſé par le rayon, & *non point par le* » *diamètre, comme on le trouve dans plu-* » *ſieurs ouvrages* ».

Voilà donc une excluſion formelle donnée à la meſure $\frac{c^2}{2r}$, & cette meſure même de la force préſentée comme erronée. L'autre Géomètre écrivoit en ces termes :

« J'ai prouvé que c'eſt avec raiſon, que » Newton prend pour valeur de la force » centrifuge le *quarré de la vîteſſe diviſé par* » *le rayon, au lieu de diviſer par le dia-* » *mètre. J'avois fait moi-même cette der-* » *nière faute*, dans le Mémoire qui a été » imprimé dans les tranſactions philoſophi- » ques, étant dans l'uſage de me ſervir » alors de la méthode des infiniment petits, » & de ſuivre les formules du Marquis de » l'Hôpital. Je m'apperçus tout de ſuite » *de cette faute*, & je la corrigeai dans le » Mémoire que j'envoyai peu de tems » après à l'Académie des Sciences. *Cette*

» *faute* avoit embarraſſé pendant long-
» tems M. Simpſon, grand Géomètre An-
» glois, qui n'avoit pas eu connoiſſance
» de mon nouveau Mémoire. Il y travail-
» la très-long tems, & enfin il vint à bout
» de la découvrir; ainſi qu'on peut le voir
» dans ſes ouvrages ».

Voilà encore une nouvelle excluſion bien formelle donnée à la meſure $\frac{c^2}{2r}$. Où eſt donc cet accord, dont parle M. Bézout, d'employer $\frac{c^2}{2r}$ pour meſure de la force, dans la courbe conſidérée comme rigoureuſe, & $\frac{c^2}{r}$, quand la courbe étoit conſidérée comme poligone? L'Auteur de cette derniere lettre, va même bien plus loin; inſtruit des queſtions qui avoient été agitées à l'Académie Royale des Sciences, au ſujet de ces meſures, il marque : *ne croyez pas non plus que l'expreſſion du quarré de l'arc diviſé par le diamètre, ni par le rayon* « puiſſe repréſenter la ſomme des » forces centrales, pendant le tems que » le corps décrit cet arc; puiſque la ſomme » de ces forces eſt comme le tems, ou » comme l'arc, & nullement comme le » quarré de l'arc ».

Et en effet, ce Géomètre, l'un de ceux qui

qui a le plus étudié la matiere des forces centrales, conſidére ici la force de la peſanteur en ſoi, & par la ſomme des efforts que le corps fait dans une ſomme de momens, pour ſe retirer, en détruiſant toutes les forces centrifuges, de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tendoit à parcourir; & dès-lors, l'expreſſion de la force, comme il a été démontré, n'eſt plus ni $\frac{c^2}{2r}$, ni $\frac{c^2}{r}$, nous verrons tout à l'heure que M. Bézout rejette encore cette idée dans ſon rapport, voulant toujours que l'effet de la force centrale ſoit $\frac{c^2}{3r}$, ou $\frac{c^2}{r}$; ſuivant que le corps décriroit la courbe rigoureuſe, ou la courbe poligone.

Le même Géomètre, dans une lettre poſtérieure, finit même par rejetter ces deux expreſſions de la meſure de la force par un autre motif: « Vous me faites tou-
» jours dire (dit-il) ce que je combats
» le plus; que la force centrale eſt expri-
» mée par le quarré de l'arc, diviſé par le
» rayon, au lieu que c'eſt *le quarré du*
» *mouvement, ſuivant la tangente, diviſé*
» *par le rayon*, ce qui eſt bien différent;
» puiſque l'arc eſt une quantité variable,

» pendant que le mouvement ſur l'arc eſt » toujours le même ; c'eſt là ce qui fait que » l'expreſſion de la force centrale eſt conſ- » tante, ainſi que cette force.

Il paroît donc réſulter de cet expoſé, que c'eſt à tort que M. Bézout prétend que tous les Géomètres ſont d'accord ſur l'uſage qu'ils font des deux meſures $\frac{c^2}{2r}$, & $\frac{c^2}{r}$ de la force centrale dans le cercle, ſuivant que la courbe ſeroit regardée par eux comme rigoureuſe, ou comme poligone. A en juger même par les différentes idées que chacun ſe forme de cette force, on ne peut s'empêcher de conclure que ces idées ſont encore bien confuſes à cet égard, & que l'on doit ſavoir gré à ceux qui font des efforts pour y porter la clarté.

Comme les forces motrices ſont ordinairement repréſentées par les eſpaces qu'elles font parcourir aux corps, dans un tems donné ; l'on voit qu'en prenant pour meſure de la force centrale du cercle $\frac{c^2}{r}$, au lieu de $\frac{c^2}{2r}$, l'on peut être induit en erreur, en concluant de la meſure $\frac{c^2}{r}$, que ce ſeroit là la hauteur, dont la force feroit deſcendre le corps pendant le tems qu'il

auroit employé à décrire l'arc c; ce qui ſeroit faux, puiſque cette hauteur ou eſpace parcouru, étoit toujours $\frac{c^2}{2r}$; & c'eſt cependant dans ce ſens que la plupart des Géomètres qui ont employé cette meſure, ſemblent l'avoir entendu; c'eſt-à-dire, au ſens que la hauteur dont la force feroit deſcendre le corps, dans le tems employé à décrire l'arc c, ſeroit en effet, $\frac{c^2}{r}$. L'eſpace exprimé par $\frac{c^2}{r}$, eſt celui que le corps décriroit uniformément avec la vîteſſe acquiſe, à la fin du tems employé à décrire l'arc c, & pendant le même tems, qui eſt toujours double de l'eſpace exprimé par $\frac{c^2}{2r}$, qui eſt l'eſpace réel que le corps auroit parcouru pendant le cours du même tems, d'un mouvement accéléré. Delà il ſuit qu'on peut exprimer la force centrale du cercle, par $\frac{c^2}{r}$; au ſens que $\frac{c^2}{r}$, exprimera l'eſpace double de celui que la même force feroit décrire, dans le même tems, d'un mouvement accéléré; ou ce qui revient au même, au ſens que la force ſeroit exprimée par la vîteſſe acquiſe, à la fin du même tems. On peut donc ad-

mettre, ſans inconvénient, les deux meſures $\frac{c^2}{2r}$, $\frac{c^2}{r}$ de la force centrale du cercle, pourvu qu'on l'entende comme il convient. Dans le premier cas, la force eſt repréſentée par l'eſpace réel qu'elle auroit fait parcourir au corps d'un mouvement accéléré; & dans le ſecond, par celui qu'elle lui feroit parcourir uniformément, avec la vîteſſe acquiſe, à la fin du tems employé à décrire le premier eſpace parcouru: & dès-lors cette ſeconde meſure de la force eſt néceſſairement double de la premiere, de quelque maniere même que le cercle ſoit conſidéré, comme courbe rigoureuſe, ou comme courbe poligone; car l'on ſent que cette différente dénomination du cercle, n'a rien de commun avec la meſure de la peſanteur.

Seconde Partie de la premiere Propoſition touchant la légitimité de la meſure $V\frac{c^2}{2r}$ *de la peſanteur.*

L'AVIS des Commiſſaires de l'Académie ſur cette meſure de la peſanteur, a été *quelle ne pouvoit être admiſe par les Géomètres, & que l'Auteur devoit être invité à retirer cette propoſition, comme contraire à des vérités démontrées* : ſur le ſeul fondement que l'effet de la force centrale étoit toujours, *ou une vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems, ou un objet quelconque proportionné à cet effet.* D'où *il ſuivoit toujours que la force centrale ne pouvoit avoir pour meſure que* $\frac{c^2}{r}$, *c'eſt-à-dire, le quarré de l'arc décrit, diviſé par le rayon.*

Cet avis eſt entiérement conforme à ce que M. Bézout avoit écrit à l'Auteur, le 13 Juillet 1772 : « Nous ne pouvons » vous accorder que la meſure de la force » centrale eſtimée par l'eſpace qu'elle fe- » roit décrire uniformément, dit-il, pen- » dant le tems qui a été employé à dé-

» crire l'arc c, ſoit $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$; car ſi vous en-
» tendez que cet eſpace eſt décrit avec
» la vîteſſe acquiſe par l'accélération qui
» a engendré la hauteur $\frac{c^2}{2r}$, alors il a pour
» meſure $\frac{c^2}{r}$; c'eſt-à-dire, le double; & ſi
» vous ne l'entendez pas ainſi, cet état
» d'uniformité eſt un être nouveau, mais
» qui certainement ne ſervira pas de meſu-
» re à la force centrale ».

Le Géomètre, dont on vient de parler, qui avoit été invité à la recherche du problême, touchant l'eſpace que décriroit un corps, s'il ne recevoit jamais de nouvelles impulſions de la force centrale, & par l'effet de la ſeule impulſion qui, dans l'état de repos, le feroit tendre au centre de peſanteur; écrivoit à l'Auteur, au ſujet de l'expreſſion $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$: « Vous intro-
» duiſez une nouvelle expreſſion qui peut,
» à la vérité, repréſenter la vîteſſe acquiſe
» au bout d'un tems donné, par une force
» qui agit uniformément, & ſuivant la
» même direction, ou ſuivant des direc-
» tions parallèles ».

On voit que ce Géomètre, auſſi ſage qu'éclairé, à qui on a même caché les rai-

ſons ſur leſqu'elles l'expreſſion $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$, eſt appuyée, dans l'eſpérance qu'en travaillant d'après lui-même, il rencontreroit la même expreſſion, ſe donne bien de garde de trancher, & de prononcer que cette expreſſion *ne pouvoit être admiſe par les Géomètres.* Il reconnoît au contraire que cette expreſſion *peut repréſenter la vîteſſe acquiſe au bout d'un tems donné, par une force qui*, comme celle de la peſanteur, *agit uniformément, & ſuivant la même direction, ou ſuivant des directions parallèles.*

La mépriſe dans laquelle tombent nos Géomètres dans leur rapport eſt facile à appercevoir. Ils confondent la force accélératrice avec la force de la peſanteur : la meſure de la force accélératrice eſt l'eſpace parcouru à la fin d'un tems donné, ou la moitié de la vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems $t = 1$, ainſi qu'il a été prouvé. Il eſt évident que pour avoir un effet de la force accélératrice, par lequel on puiſſe la repréſenter, c'eſt une néceſſité de laiſſer tomber un corps pendant un certain tems, & de meſurer les eſpaces que l'accélération lui auroit fait parcourir pendant ce tems. Ces eſpaces parcourus pour-

ront repréſenter la force accélératrice, pendant ce même tems; mais il n'en eſt pas de même de la peſanteur. Le corps peſe ſur ſon centre de peſanteur, dans ſon état de repos, & avant que de tomber : l'accélération qui naît de ſa chûte eſt donc abſolument étrangère à la peſanteur, & ne peut par conſéquent lui ſervir de meſure. De même que quand on peſe des corps dans la balance, on ne s'aviſe pas de meſurer leur peſanteur par les effets que produiroient ſur l'un des baſſins, ces corps qu'on y laiſſeroit tomber d'une certaine hauteur. Ces corps ſont peſés en repos, & la meſure de la peſanteur eſt l'effet produit dans cet état, & non point l'effet qui ſeroit produit par l'état d'accélération.

Ces idées, ſur la meſure de la peſanteur, ſont très-certainement auſſi ſimples qu'exactes, & on n'a rien omis pour les développer à M. Bézout; on lui a démontré de plus, comme on l'a fait dans la cinquième Obſervation, que l'effet produit par la peſanteur, dans l'état de repos, étoit toujours la racine quarrée de l'effet produit dans l'état d'accélération; que la meſure de la peſanteur des corps, proche la ſurface de la terre, n'étoit pas les quinze pieds d'eſpace qu'ils parcourent

dans la première ſeconde, que c'étoit là la meſure de la force accélératrice ; mais $\sqrt{15P}$ qui eſt l'eſpace que la peſanteur leur feroit parcourir, par l'effet de la force de cette ſeule impulſion centrale qui les fait tendre au centre de la terre dans leur état de repos. N'eſt-il pas étonnant d'entendre dire enſuite froidement à M. Bézout, dans ſon rapport : *que l'Auteur devoit être invité à retirer cette propoſition, comme contraire à des vérités démontrées, & qu'elle ne pouvoit être admiſe par les Géomètres.* Mais pour être en droit de parler de la ſorte, il faudroit avoir prouvé auparavant, ou que l'effet produit par la force, dans l'état de repos du corps, n'étoit pas l'effet de la peſanteur, ou que cet effet étoit mal exprimé, en l'exprimant par la racine quarrée de l'effet produit dans le même tems, dans l'état d'accélération. M. Bézout ne prouve ni l'une, ni l'autre de ces deux propoſitions, & porte néanmoins ſur la propoſition de l'Auteur, le même jugement préciſément que s'il les avoit prouvées. On n'eſt en droit de rejetter une propoſition, appuyée ſur une démonſtration, qu'autant que l'on renverſe la démonſtration. Tant que la démonſtration

ſubſiſte, il eſt évident que l'on n'a rien fait contre la propoſition. Ainſi ces ſimples aſſertions de M. Bézout : que *la propoſition de l'Auteur ne pouvoit être admiſe par les Géomètres. Que l'effet de la force centrale étoit toujours une vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems*; ne portent aucune eſpece d'atteinte à la propoſition dont il eſt ici queſtion. Qu'un corps *A*, ſoit ſuppoſé mû par l'effet d'une ſeule & même impulſion centrale qui le feroit tendre vers un point : ce corps, relativement à ce point, auroit une force centrale, & ſa vîteſſe ſeroit conſtante, puiſqu'elle ſeroit l'effet de la même impulſion qui lui auroit été imprimée tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible. Cette vîteſſe ſeroit la même au commencement, & à la fin d'un même tems; il n'y auroit donc ici nulle *vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems t*, & néanmoins il y auroit une impulſion, ou force centrale qui pouſſeroit le corps vers le point où l'action de la force ſeroit dirigée. Il n'eſt donc pas vrai que l'*effet de la force centrale ſoit une vîteſſe acquiſe à la fin d'un tems.* Cette propoſition n'eſt vraie que dans le cas de la force accélératrice, & ceſſe de l'être dans le cas dont il s'agit.

SECONDE PROPOSITION.

Qu'il eſt faux qu'un corps, peſant ſur ſon centre de peſanteur, puiſſe décrire autour de ce centre, par le mouvement angulaire du rayon vecteur, à l'extrémité duquel ce corps ſe trouveroit placé, aucune eſpece de courbes non fermées qui s'écarteroient à l'infini de leur axe, & en conſéquence que les forces centripètes que M. Newton aſſigne pour la génération de ces ſortes de courbes ſont nulles, fauſſes & chimériques.

ON a vu, dans le cours de cet Ouvrage, combien les démonſtrations qui établiſſent la vérité de cette propoſition ont été multipliées, & les réſultats conſtans & uniformes qu'on avoit obtenus par toutes les méthodes qui y ont été employées, & dont il n'a tenu qu'aux Commiſſaires de l'Académie de prendre connoiſſance, par le ſecond Mémoire que l'Auteur leur a fait préſenter, par le Secretaire même de ladite Académie : mais ces Meſſieurs ont trouvé beaucoup plus court de

ſe refuſer à l'examen de ce ſecond Mémoire qui auroit pu leur ouvrir les yeux, & de décider que cette propoſition renfermoit *un paralogiſme qui n'étoit même ni ſubtil, ni difficile à trouver, & à détruire*, comme on devoit *naturellement penſer que devoit l'être le paralogiſme qui peut avoir conduit à prétendre renverſer des vérités démontrées.* Le Lecteur aura ſans doute déja remarqué l'abus perpétuel que M. Bézout, Auteur de ce ſecond rapport, comme il l'eſt du premier, ne ceſſe de faire de cette expreſſion, *vérités démontrées*, qui eſt conſacrée pour déſigner les vérités établies par les démonſtrations les plus rigoureuſes, les plus claires & les plus inconteſtables. On a déja obſervé, dans la préface de cet Ouvrage, qu'il ne s'agiſſoit ici que d'une ſimple hypothèſe. Que la queſtion touchant la génération des courbes non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un ſeul & même point fixe, n'avoit pas ſeulement été agitée, bien loin d'avoir été élevée au rang des *vérités démontrées.* Qu'on avoit ſeulement ſuppoſé, & non prouvé, qu'un corps pouvoit décrire de telles courbes autour d'un point; & que partant de cette hypothèſe, on avoit exprimé par de certaines lignes les effets d'une for-

ce dont l'exiſtence étoit tout au moins un problême. Ce ſont ces ſimples hypothèſes, que M. Bézout prend pour *des vérités démontrées*; & l'une des démonſtrations, dont l'Auteur ſe ſert pour en prouver le faux, pour *un paralogiſme qui n'eſt ni ſubtil, ni difficile à trouver, & à détruire.* Voyons donc ſi M. Bézout ſera plus heureux à *trouver* un paralogiſme dans une propoſition exacte, qu'il ne l'a été en donnant de ſimples hypothèſes *pour des vérités démontrées.*

Pour prouver la poſſibilité du mouvement angulaire autour d'un point, ou ſon impoſſibilité, l'Auteur a établi une doctrine exacte, dont M. Bézout ne parle point dans ſon rapport. Cette doctrine ſe réduit très-ſimplement à la détermination de l'élément du mouvement angulaire, dont il ſeroit queſtion. Quand cet élément ſe réduit à zéro, il eſt clair que le mouvement ſuppoſé ne ſauroit exiſter, puiſque zéro ſeroit ſon principe générateur; mais quand l'élément ne ſe réduira point à zéro, le mouvement ſera poſſible, puiſqu'il auroit un principe générateur qui ne ſeroit point zéro. Rien de plus inconteſtable que ces principes: ſuppoſons donc actuellement un arc infiniment petit $\dot{x}$, décrit dans un

tems infiniment petit $\dot{t}$, & qu'en même tems l'eſpace parcouru croiſſe, à proportion que le tems employé à le parcourir ſeroit ſuppoſé plus grand, & de telle ſorte que l'arc décrit, & le tems employé à le décrire ſoient toujours d'un même ordre. Je dis que dans ce cas, le mouvement angulaire ſera poſſible; puiſqu'ayant un arc $\dot{x}$, décrit dans un tems $\dot{t}$, l'on finiroit par avoir, à la fin d'une ſomme infinie de petits tems $\dot{t}$, un arc fini x, dans un tems fini t. Mais s'il arrivoit au contraire que le tems, & l'eſpace parcouru ne fûſſent pas d'un même ordre, comme, par exemple, ſi l'on avoit un arc infiniment petit $\dot{x}$, qui devroit être décrit dans un tems fini t, ou un arc infiniment petit $\ddot{x}$, du ſecond ordre qui devroit être décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$; je dis qu'alors le mouvement n'exiſteroit point; puiſqu'un arc infiniment petit $\dot{x}$, ſeroit zéro relativement au tems fini t, durant lequel il devroit être décrit, & que de même un arc infiniment petit du ſecond ordre $\ddot{x}$ ſeroit zéro relativement au tems infiniment petit $\dot{t}$, dans lequel il devroit être parcouru. Voilà les principes clairs & évi-

dens, dont on eſt parti dans cette ſeconde propoſition, que M. Bézout ſupprime totalement dans ſon rapport, & qu'il eût fallu par conſéquent détruire pour infirmer l'application que l'Auteur en fait au mouvement d'un corps par la circonférence d'une courbe non fermée, ſuppoſée décrite autour d'un point.

M. Bézout & l'Auteur ſont d'accord que *lorſque le corps ſeroit dans la partie de la courbe la plus éloignée du centre des forces, l'arc décrit ſeroit un infiniment petit du ſecond ordre, dans un tems infiniment petit.* Mais quelle conſéquence tire l'Auteur d'un arc infiniment petit du ſecond ordre, qui ſeroit décrit dans un tems $\dot{t}$, infiniment petit? que cet arc, ſeroit zéro, ſuivant la doctrine qu'il avoit précédemment établie; ou, ce qui revient au même, que dans une ſomme infinie de tems infiniment petits $\dot{t}$, c'eſt-à-dire, dans le cours d'un tems t, fini, l'arc décrit ne ſeroit qu'un infiniment petit $\dot{x}$, & par conſéquent zéro; & que de-là le mouvement angulaire ne pouvoit entrer dans la génération d'une courbe non fermée, puiſque ſon principe générateur ſeroit un arc infiniment petit $\dot{x}$, décrit, non pas dans un

tems infiniment petit $\dot{t}$, du même ordre que cet arc, mais dans un tems fini t, d'un ordre ſupérieur. M. Bézout embarraſſé de cet argument a pris le parti de n'en point parler, & de prouver l'exiſtence d'*un paralogiſme qui n'étoit ni difficile à trouver, ni à détruire*, par ces paroles : » *Lorſque le corps eſt dans la partie de la* » *courbe la plus éloignée du centre des for-* » *ces, l'arc qu'il décrit, non ſeulement,* » dit-il, *peut être, mais doit être infini-* » *ment petit du ſecond ordre, dans un tems* » *infiniment petit.* Voilà tout l'argument de M. Bézout, qui ſe réduit, comme l'on voit, à prouver par ce qui eſt en queſtion. On nie la poſſibilité du mouvement angulaire, quand il arrive que le corps auroit à décrire un arc, infiniment petit $\ddot{x}$, du ſecond ordre dans un tems $\dot{t}$, infiniment petit ; & M. Bézout dit qu'en effet cet arc $\ddot{x}$, doit être décrit dans ce tems $\dot{t}$, quand le corps parcourt une courbe non fermée ; c'eſt-à-dire, qu'il prend pour preuve d'un paralogiſme qui n'*étoit ni difficile à trouver, ni à détruire*, le mouvement même par la courbe non fermée, dont l'exiſtence eſt conteſtée, & qu'il s'agiſſoit d'établir. Si quelqu'un fait ici

ici un *paralogiſme qui n'eſt difficile ni à trouver, ni à détruire*, c'eſt M. Bézout lui-même, en ſuppoſant, qu'il eſt poſſible qu'un corps ſoit mû d'un mouvement angulaire autour d'un point, quand l'élément ou principe générateur de ce mouvement ſeroit ou un arc infiniment petit $\ddot{x}$, du ſecond ordre, décrit dans un tems infiniment petit $\dot{t}$, ou un arc infiniment petit $\dot{x}$, décrit dans un tems t, fini.

M. Bézout prétend encore que cette ſeconde propoſition de l'Auteur, « conduit » à cette autre propoſition très-certainement abſurde.... Le mouvement uniforme d'un corps en ligne droite eſt abſurde; en effet, dit-il, le mouvement » en ligne droite, conſidéré par rapport » à un point quelconque, pris hors de » cette ligne, eſt abſolument dans le même cas que celui d'un corps qui décriroit une courbe non fermée ».

M. Bézout a pris cette idée d'une lettre que l'Auteur des propoſitions lui a écrite, & qu'il a dû lire à l'Académie, comme il en avoit été prié; l'Auteur en avoit fait un moyen de plus pour prouver l'impoſſibilité de la génération d'une courbe non fermée *AM*, autour d'un point fixe

C, centre de peſanteur du corps *A*, en montrant que l'on pourroit, par la même raiſon, ſuppoſer que la ligne droite *AT*, (*Fig.* 21), pourroit être décrite par le mouvement angulaire d'un rayon vecteur *AC*, qui croîtroit en tems égal, & à l'infini, comme dans la courbe non fermée *AM*, tandis que le mouvement angulaire y diminueroit auſſi, & en tems égal, à l'infini : mais que comme il ſeroit abſurde de ſuppoſer qu'un corps pût décrire la droite *AT*, en tendant continuellement vers un point fixe *C*, dont il s'éloigneroit à l'infini; il étoit tout auſſi abſurde de prétendre qu'il pût décrire la courbe non fermée *AM*, qui ſeroit abſolument dans le même cas que la ligne droite *AT*.

Qui pourroit croire que M. Bézout eût cherché à retourner contre l'Auteur un raiſonnement dont il paroît avoir ſenti toute la force, & qui renverſe de fond en comble l'hypothèſe de la génération des courbes à décrire autour d'un point, par l'aveu même que fait M. Bézout, *que le mouvement en ligne droite, conſidéré par rapport à un point quelconque, pris hors de cette ligne, étoit abſolument dans le même cas que celui d'un corps qui décriroit une courbe non fermée.* Or, il eſt très-

facile de prouver qu'un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire la ligne droite AT, ne pourroit tendre en même tems vers un point C; puiſque, s'il tendoit vers C, il auroit une force centripète, dont l'effet ſeroit de changer à tout inſtant la direction du corps, & par conſéquent de lui faire décrire une ligne courbe. Donc le corps, décrivant la droite AT, n'auroit nulle tendance en C; & comme M. Bézout convient, que *le mouvement d'un corps par la courbe non fermée, étoit abſolument dans le même cas que celui par la ligne droite* AT. Il s'enſuit, par l'aveu même de M. Bézout, que le corps décrivant la droite AT, ou la courbe non fermée AM, n'auroit nulle tendance vers un point C, pris hors de ces deux lignes.

Quant à ce que dit M. Bézout, que la *propoſition*, dont il eſt ici queſtion, *conduit à cette autre propoſition très-certainement abſurde... Le mouvement uniforme d'un corps en ligne droite, conſidéré par rapport à un point pris hors de cette ligne, eſt abſurde.* La réponſe eſt ici, oui & non; oui ce mouvement eſt abſurde, ſi le corps eſt ſuppoſé tendre vers ce point; mais il n'eſt point abſurde s'il n'y tend point, & que rien ne le détourne de ſa direction rectiligne AT.

M. Bézout permettra qu'on lui diſe, que voilà des objections & des raiſonnemens qui ne ſont guère dignes de lui.

M. Bézout qui ne ceſſe de voir des paralogiſmes, dans les propoſitions les plus exactes, en trouve un nouveau dans le raiſonnement que fait l'Auteur, au ſujet de la loi que ſuivroit le décroiſſement du mouvement angulaire, en tems égal, ſi le corps décrivoit une courbe non fermée autour d'un point. L'Auteur a ſuppoſé que ce décroiſſement, ayant toujours la même cauſe, pouvoit être conſidéré comme uniforme, puiſqu'une même cauſe devoit toujours produire des effets égaux, en tems égaux. La cauſe qui auroit fait décroître le mouvement angulaire donné A, à la fin du premier tems t, d'une quantité m, auroit réduit ce mouvement à la fin de ce tems, à la quantité $A - m$; mais cette cauſe ſubſiſtant dans tous les inſtans ſuivans, il eſt clair que dans une ſuite de tems finis t, ce mouvement ſeroit réduit aux quantités $A - m$, $A - 2m$, $A - 3m$.... &c; & enfin à une quantité $A - nm = 0$. D'où ſuivroit l'équation $A = nm$. D'où on tireroit $\frac{A}{m} = n$, pour expreſſion du tems de la durée du mouve-

ment angulaire. D'où il ſuivoit qu'afin que le tems n, pût être infini, comme l'exigeroit la deſcription d'une courbe non fermée, qui étoit infinie de ſa nature, il faudroit que le décroiſſement m, du mouvement, à la fin du premier tems fini t, fût infiniment petit à l'égard du mouvement A, puiſque l'on auroit alors $\frac{A}{m} = \frac{A}{\frac{A}{\infty}} = \infty = n$; & pour prouver combien cette propoſition eſt exacte, l'Auteur ne manquoit pas de faire obſerver, qu'en effet quand le décroiſſement m, étoit infiniment petit, à l'égard du mouvement angulaire ſuppoſé A, le corps décrivoit un cercle d'un mouvement uniforme, & que par conſéquent, le tems n, de la durée de ſon mouvement angulaire devenoit infini, puiſque le mouvement ci-deſſus : $A - m$, $A - 2m$, $A - 3m$.... &c. devenoit $A - 0$, $A - 0$, $A - 0$, .. &c. C'eſt pourtant ce raiſonnement ſi exact, que M. Bézout oſe qualifier *de nouveau paralogiſme qui conſiſte à ſuppoſer que le mouvement angulaire diminue uniformément.*

Mais M. Bézout ne prouve pas que le mouvement angulaire ſuive une autre loi dans ſon décroiſſement en tems égal. Il

n'avoit donc aucun droit, ni aucune raiſon de qualifier de *paralogiſme*, une propoſition qu'il n'a attaquée par aucun raiſonnement. Quand l'Auteur a ſuppoſé que le mouvement angulaire décroiſſoit uniformément, il eſt parti d'un principe qui eſt fort ſimple; ſavoir, que dès que le mouvement décroît d'une quantité finie m, à la fin d'un tems fini t. Il y a néceſſairement une cauſe, qu'on peut toujours repréſenter par un obſtacle : par exemple, P, qui produit cette diminution m, dans le mouvement A, du corps, à la fin d'un tems fini t; mais on a droit de ſuppoſer cet obſtacle P, conſtant, tant qu'on ne voit rien en lui qui puiſſe faire croître, ou décroître ſon action en tems égal t. La cauſe qui fait décroître ici le mouvement angulaire, eſt l'aggrandiſſement de l'angle formé par la direction du mouvement par la tangente, & le rayon vecteur, comme on l'a dit, à la fin de la ſixième Obſervation, cet angle devenant toujours plus obtus, dans une courbe non fermée, à meſure que la courbe s'éloigne davantage du point de ſon origine, & par-là le mouvement angulaire y décroîtroit toujours davantage en tems égal t; puiſque ce mouvement s'éloigneroit toujours plus de l'état où il devroit ſe

trouver, pour que ce décroiſſement devînt nul, qui eſt le cas où l'angle formé par la tangente, & le rayon vecteur ſeroit de 90 degrés, parce qu'alors la courbe décrite ſeroit un cercle; par exemple, ſi cet angle étoit ſuppoſé de 120 degrés, le mouvement angulaire, à la fin d'un même tems t, y décroîtroit plus, que dans un angle de 100, parce que l'angle de 120 degrés s'éloigne davantage de l'angle droit, que l'angle de 100 degrés. Ainſi le mouvement angulaire décroîtroit encore plus dans une courbe non fermée, que s'il décroiſſoit uniformément : mais comme, dans ce dernier cas même, le mouvement angulaire finiroit, & ſeroit détruit, à la fin d'un tems t, fini; il s'enſuit qu'à plus forte raiſon ſeroit-il anéanti, dans ce même tems fini, ſi on avoit égard à ce ſurplus de décroiſſement en tems égal.

TROISIEME ET QUATRIEME PROPOSITIONS.

1°, *Que la loi d'une force centrale, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, eſt encore fauſſe dans le cas où le corps ſeroit ſuppoſé décrire une ellipſe par l'un de ſes foyers.*

2°, *Que c'eſt à la force de projection, & non point à la loi d'une attraction, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance que l'on doit attribuer l'augmentation, ou la diminution de force centrale qu'éprouve le corps, lorſque la direction de ſon mouvement par la tangente, & le rayon vecteur forment un angle moindre, ou plus grand qu'un angle droit.*

L'ON a réuni ici ces deux propoſitions dans un même article, parce que M. Bézout dans ſon rapport les a réunies, n'ayant dit que très-peu de choſes de cette derniere propoſition qu'il a cru avoir réfutée, par ce qu'il a dit de la première; l'on a cru auſſi devoir changer l'énoncé de cette même dernière propoſition, pour ſe prêter à la délicateſſe de cet Académicien qui

en a fait, peut être avec raiſon, la cenſure dans ſon rapport, mais en obſervant néanmoins de conſerver toujours l'eſprit de la propoſition.

L'Auteur démontre dans ces deux propoſitions, ce qu'il a clairement établi dans le cours de cet Ouvrage; ſavoir, que la force accélératrice du corps, conſidérée en ſoi, & ſeulement relativement au mouvement angulaire du corps, placé à l'extrémité d'un rayon vecteur r, plus long, ou plus court, étoit toujours $\frac{c^2}{2r}$. L'Auteur, dans ce moment, ne conſidére point quel doit être l'état de la force, lorſque la courbe ſera oblique ſur le rayon vecteur; car dans ce cas l'expreſſion de la force devient $\frac{c^2}{2r} \pm R \mp r$, comme il a été prouvé.

Comme c'eſt la force de projection qui ajoute, ou retranche ici à la force centrale, cette addition, ou ſouſtraction, lui eſt abſolument étrangère, & c'eſt pourquoi en conſidérant cette force en ſoi, & ſans égard à l'obliquité de la courbe ſur le rayon vecteur, ſon expreſſion eſt toujours $\frac{c^2}{2r}$. Voilà l'eſprit de ſa propoſition, le paralogiſme que M. Bézout impute à cette

La première Obſervation que l'Auteur ſe ſouvient d'avoir lue à l'Académie, rouloit ſur le point Mathématique. L'Auteur y témoignoit ſa ſurpriſe de ce que les Géomètres ne lui avoient donné aucune expreſſion. On exprime, diſoit-il, une ligne par a, ſon quarré, ſon cube, ſa quatrième puiſſance.... &c. par a^2, a^3, a^4... &c. & le point, qui eſt le principe de l'étendue, n'a aucune expreſſion. Sur cela l'Auteur obſervoit qu'il croyoit qu'il falloit l'exprimer par a^0, comme principe générateur de la ligne a^1. Perſonne dans l'Académie n'a improuvé cette idée qui pourroit avoir ſon degré d'utilité, dans pluſieurs occurrences, comme on le verra, par la ſuite, en admettant ſur-tout des points de différens ordres a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c. à l'infini, comme principes générateurs les uns des autres.

Un très-célébre Géomètre, à qui cette idée avoit été communiquée, écrivoit à l'Auteur : «Je ſuis perſuadé que vos recher» ches ne pourront qu'être fort utiles, l'ex» preſſion que vous donnez du point, re» préſenté par la grandeur lorſque ſon ex» poſant eſt zéro, eſt bien vraie ; car on eſt » toujours convenu qu'en diminuant l'ex-

» poſant d'une unité, la grandeur diminue » d'une dimenſion. Ainſi a^2 repréſentant » une ſurface, $a^{2-1}=a^1$ repréſente une li- » gne ; $a^{1-1}=a^0$ repréſentera donc la gran- » deur d'une dimenſion au-deſſous de la » ligne ; c'eſt-à-dire, le point. On a dit » communément que a^0 étoit l'unité, ce » qui bien entendu veut dire la même » choſe que le point ; car l'unité eſt le prin- » cipe de toute grandeur. De ce que la » quantité ne peut diminuer dans ſon ex- » poſant d'une unité ſans que la grandeur » repréſentée par cette quantité ne dimi- » nue d'une dimenſion, il ſuit que la » quantité dont on diminue l'expoſant d'u- » ne unité devient alors l'élément de la » première ; & c'eſt auſſi la première opé- » ration & le fondement du calcul différen- » tiel, ou de la méthode des fluxions ». L'Auteur n'a donc point ici à rougir d'une idée qui a eu l'approbation d'un des premiers Géomètres de l'Europe, & qui peut répandre le plus grand jour ſur la nature de la *curvité*, & nous faire connoître dans quel cas une courbe peut être rectifiée, & dans quel cas elle ne ſauroit l'être.

Dans une autre occaſion, il traça ſur le tableau de la Salle d'aſſemblée de l'Acadé-

mie, une courbe qui s'étoit préſentée à lui ſous cette forme : Si l'on coupe les ordonnées MB, NQ, du cercle, aux points E, O.... &c ; en telle ſorte que l'on ait toujours les parties EB, OQ... &c, de ces ordonnées quatrièmes proportionnelles aux lignes AD, BD, AB : faiſant paſſer une ligne par les points A, E, O, D, (*Fig.* 22) ; l'on aura une courbe AOD, & en doublant les ordonnées, cette courbe ſera A, E, O, D, S, A.

Actuellement ſi l'on nomme la conſtante AD (a), la coupée AB (x), l'ordonnée BE (y). L'analogie relative à cette courbe ſera : $a : a - x :: x : y$, & ſon équation $ay = ax - x^2$, qui ne différe du cercle qu'en ce que la conſtante a, multiplie y, au lieu que dans le cercle, y, eſt multiplié par lui-même.

En examinant cette courbe par ſa génération & par ſon équation, l'Auteur fit pluſieurs obſervations ; premiérement, par ſon équation, & par ſa quadrature ; il la jugea tout de ſuite être une parabole, puiſque d'une part l'une des variables n'étoit que du premier degré, tandis que l'autre variable montoit au ſecond, & que d'autre part ſa quadrature étoit, comme celle de la parabole, les deux tiers du

rectangle circonſcrit. Il s'appliqua donc, pendant quelque tems, à chercher l'arc de parabole auquel on pût appliquer l'équation $ay = ax - x^2$; & ne cherchant cet arc que vers une des branches de cette courbe, il eut la mal-adreſſe de ne pas le trouver d'abord; il ſe convainquit même, ce qui n'étoit pas difficile, qu'il n'exiſtoit aucun arc ſur l'une des branches de cette courbe, auquel cette équation pût convenir. D'autre part, il lui paroiſſoit fort extraordinaire qu'on pût appliquer cette même équation à aucune partie de la parabole, à cauſe qu'il devoit en réſulter qu'une courbe infinie & non fermée, telle qu'eſt cette courbe, pourroit donner une équation, à la maniere des courbes fermées, déterminées, ſur une ligne finie AD, qui pourroit être conſidérée comme ſon axe, propriété juſques-là inconnue à la parabole. Enfin l'Auteur conclut de ces différentes réflexions, qu'il étoit peut-être poſſible que cette courbe $AEODSA$, fût une courbe particulière, fermée, & fort approchante de la parabole. C'eſt dans cette vue qu'il la mit ſous les yeux des Géomètres de l'Académie, afin qu'ils puſſent en déterminer la nature. Il n'y eut guère que MM. d'Alembert, &

le Boſſu qui l'examinèrent, & qui, par ſon équation, la jugerent appartenir à la parabole, à quoi l'Auteur ne s'oppoſa nullement. Il ajouta au contraire qu'*elle lui avoit paru telle, mais qu'il n'avoit pu trouver aucun arc de parabole auquel on pût en rapporter l'équation.* Il en écrivit même à M. d'Alembert, qui voulut bien par ſa réponſe, le confirmer dans l'idée que l'équation $ay=ax-x^2$, ne pouvoit qu'appartenir à la parabole, & diſſiper toute idée de courbe fermée. L'Auteur rechercha donc de nouveau l'arc de parabole, auquel cette équation pût appartenir, & il le trouva enfin. Et c'eſt à M. d'Alembert à qui il en a l'obligation : la détermination de cet arc, fait découvrir une très-belle propriété de la parabole, juſqu'à préſent inconnue; & fournit un moyen d'en former l'équation, à la manière des courbes fermées, en conſidérant la ligne finie AD, comme ſon axe.

Soit donc une parabole AMD; MT ſon axe, F ſon foyer; menant, par ſon foyer F, la double ordonnée AD, que l'on nommera a, & ſur laquelle on prendra les coupées DR, DQ... &c. (x), ſi l'on nomme les perpendiculaires RP, QN..... &c, y; l'on aura, à tous les points

points de l'arc parabolique AMD, cette analogie : $AD : (a) : AR\ (a-x) :: DR\ (x) : RP\ (y)$; c'eſt-à-dire, $a : a-x :: x : y$. D'où réſultera l'équation $ay = ax - x^2$. On peut rendre cette équation générale en ſuppoſant l'abſciſſe x, multipliée par un nombre n, quelconque, ce qui donneroit $ay = nax - nx^2$, & dans le cas où $n = \frac{33}{14}$, cette parabole ſeroit à peu près égale au demi-cercle, dont le diamètre ſera l'axe a, de cette parabole, comme il eſt facile de s'en aſſurer.

On conviendra que cette propriété de la parabole, mérite bien, autant qu'une autre, de tenir rang parmi les autres propriétés remarquables de cette courbe, & comme c'eſt à quoi ſe ſont terminées les obſervations auxquelles l'équation $ay = ax - x^2$, a donné lieu ; & que l'Académie ne *peut qu'approuver* le travail, & le zele de ceux qui découvrent de nouvelles propriétés dans les courbes. On ne voit pas juſqu'ici ſur quoi peut porter le reproche que M. Bézout fait à l'Auteur, d'*avoir préſenté des Mémoires, dont aucun n'a pu être approuvé* ; d'autant plus que l'Auteur ſe ſouvient très-bien d'avoir fait part à M. Bézout lui-même, de cette nouvelle

propriété découverte, à laquelle l'équation $ay = ax - x^2$, avoit donné lieu.

La dernière fois que l'Auteur a été à l'Académie, il a préſenté pluſieurs démonſtrations, tendantes à prouver que la meſure réelle de la force accélératrice d'un corps qui décriroit un cercle, étoit $\frac{c^2}{2r}$, & non point $\frac{c^2}{r}$, comme la plupart des Géomètres actuels le penſoient. Sur quoi M. Bézout doit ſe reſſouvenir que cette propoſition fut fort conteſtée par M. de la Lande, qui aſſura que *tous les Géomètres étoient d'accord aujourd'hui ſur cette meſure, qui étoit* $\frac{c^2}{r}$, *& non point* $\frac{c^2}{2r}$, *comme quelques Géomètres du ſiecle paſſé l'avoient penſé*, & ce fut même cette improbation que M. de la Lande donna publiquement à la meſure $\frac{c^2}{2r}$, qui fut cauſe que l'Auteur demanda des Commiſſaires à l'Académie, à l'effet de faire juger ce point qui lui étoit conteſté par l'un de ſes Membres. Perſonne dans l'aſſemblée n'avança que *tous les Géomètres avoient toujours été d'accord à recevoir les deux meſures* $\frac{c^2}{2r}$, & $\frac{c^2}{r}$, ſuivant que le cercle étoit conſidéré

comme courbe rigoureuſe, ou comme courbe poligone ; c'étoit là une idée que perſonne n'avoit que M. Bézout, qui en fit part à l'Auteur, après l'aſſemblée, plutôt comme d'un ſentiment qui lui étoit particulier, que comme celui de tous les Géomètres. Mais comment accorder M. de la Lande, avec M. Bézout ? Le premier dit publiquement en pleine Académie, ſans même être déſavoué, *que tous les Géomètres étoient d'accord aujourd'hui* à adopter pour meſure unique de la force centrale $\frac{c^2}{r}$, & qu'ils avoient reprouvé la meſure $\frac{c^2}{2r}$, que quelques Géomètres du ſiecle paſſé avoient adoptée. On lui cite même envain Newton, dans l'un de ſes corollaires, MM. Huighens & de l'Hôpital ; il perſiſte toujours dans ſon ſentiment, malgré les démonſtrations qu'on met ſous ſes yeux, & l'autorité de ces trois Géomètres célèbres, ce qui donne lieu à l'Auteur des propoſitions de demander des Commiſſaires, pour faire décider ce point controverſé. Comment, diſons-nous, accorder ce ſentiment avec celui de M. Bézout, qui dit aujourd'hui que les deux meſures $\frac{c^2}{2r}$, & $\frac{c^2}{r}$, ont toujours été,

& ſont encore aujourd'hui reçues de l'univerſalité des Géomètres, & que l'*une de ces meſures n'exclut pas l'autre.* C'eſt même ce ſyſtême qu'il oppoſe perpétuellement à l'Auteur des propoſitions, pour lui ravir juſqu'à la foible ſatisfaction d'avoir pu contribuer, par ſes recherches, à éclaircir une queſtion importante qui étoit devenue au moins très-obſcure. Il ne veut même pas que l'Auteur diſe qu'il a obtenu, en cette occaſion, un *jugement favorable de l'Académie*, parce qu'en effet, dans le ſyſtême actuel de M. Bézout, il falloit que l'Auteur n'*eût pu être approuvé* ſur aucun point, pas même lorſque M. Bézout lui écrit le 4 Juillet dernier, ce qui a même formé le jugement de l'Académie, contre le ſentiment de M. de la Lande : » qu'il eſt bien fondé à prendre pour me-
» ſure de la hauteur que la force centrale
» feroit décrire à un mobile, dans le tems
» qu'il décrit uniformément l'arc quelcon-
» que c, d'une circonférence de cercle,
» dont le rayon eſt r, à prendre, dis-je,
» pour meſure de cette hauteur la quantité
» $\frac{c^2}{2r}$; cela eſt inconteſtable pour l'arc fini,
» & pour l'arc infiniment petit.

Cette propoſition avoit été conteſtée en

pleine Académie, par M. de la Lande; ce qui donna lieu à l'Auteur des propoſitions de demander des Commiſſaires pour la faire juger par l'Académie. L'Académie la décide en faveur de l'Auteur, ſur le rapport même de M. Bézout, & de M. du Séjour; & M. Bézout ne veut pas que l'Auteur diſe qu'il a obtenu, en cette occaſion, *un jugement favorable de l'Académie.* Comment donc veut-il qu'il qualifie le jugement rendu ſur cette propoſition conteſtée?

On doit ſentir que le ſyſtême de M. Bézout ne compatit pas avec l'aveu que l'Auteur auroit fait *des découvertes intéreſſantes dans la partie des Mathématiques des forces centrales : nous ignorons*, dit-il, *qu'elles ſont ces découvertes.* Mais n'y eût-il que celles des paralogiſmes de M. Bézout, dans ces deux rapports, & dans ſes lettres; N'y eût-il que le renverſement d'un ſyſtême faux, qui conduit de grands Géomètres à déprimer des vérités utiles, ou qui peuvent le devenir par la ſuite, & la manifeſtation de l'affectation marquée de transformer perpétuellement la vérité prouvée en erreur; ces découvertes ſeules ſeroient aſſez importantes pour devoir ſatisfaire l'Auteur des propoſitions, puiſ-

que ç'a toujours été un moyen puiſſant de procurer l'avancement des ſciences que celui de dévoiler les erreurs & les préjugés des grands hommes, qui, par leur célébrité, juſtement méritée, pouvoient les accréditer dans les eſprits.

Il eſt aſſez ſingulier que M. Bézout qui a l'honneur d'être Membre d'un corps particuliérement inſtitué pour protéger les ſciences, & pour exciter le zele & le travail parmi les Sujets du Roi, qui ſe conſacrent à la recherche des vérités utiles, mette l'Auteur des obſervations dans l'obligation d'avoir à ſe juſtifier de pluſieurs idées qu'il a bien voulu communiquer à l'Académie, à quoi rien ne l'obligeoit que ſon amour pour les ſciences, & le deſir de leur accroiſſement; tandis qu'au contraire ſa qualité d'Académicien lui impoſoit le devoir rigoureux de paroître ſavoir gré à l'Auteur, au moins de ſon zele qui le portoit à faire part de ſes vues à l'Académie, ſans y être tenu, loin de lui en faire un reproche auſſi injuſte qu'amer, & plus propre à éteindre qu'à exciter dans les cœurs ce zele, & cet amour du travail auxquels les Arts & les Sciences doivent tout leur luſtre.

Il ne reſte plus qu'à prouver à M. Bézout, que les principes de l'Auteur des obſervations peuvent en effet conduire à des vérités utiles, dans la partie de l'Aſtronomie phyſique, & que ceux de M. Bézout en ſeroient plutôt la ruine. Il ſuffira pour cela de faire deux ou trois applications de ces mêmes principes.

Application de la meſure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ *de la peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle, à la détermination des mouvemens de révolution & de rotation des corps du Syſtême planétaire.*

L'ON a vu que M. Bézout reprouvoit la meſure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ de la peſanteur, *qui*, ſuivant lui, *ne peut être admiſe par les Géomètres*, & qu'il lui ſubſtitue $\frac{c^2}{r}$, ou $\frac{c^2}{2r}$, ſuivant les cas déja expliqués. Delà il ſuit que la meſure des efforts que feroit un corps pour détruire toutes les forces centrifuges, en décrivant un cercle, ou, ce qui revient au même, pour s'échapper de la direction de toutes les tangentes

finies qu'il tendroit à parcourir en décrivant un arc x, dans un tems t, ſeroit $\frac{x^2}{2r}$, ou $\frac{x^2}{r}$; & dans un tems $2t$, $3t$, $4t$... &c. l'arc décrit étant double, triple, quadruple.... &c. La meſure de ces efforts ſeroit $\frac{4x^2}{2r}$, $\frac{9x^2}{2r}$, $\frac{16x^2}{2r}$... &c.; c'eſt-à-dire, que la meſure des efforts croîtroit comme les quarrés des tems, ou des arcs parcourus pendant ces mêmes tems, ce qui eſt un très-grand paralogiſme, entiérement deſtructif du mouvement circulaire; car il s'enſuivroit delà que la peſanteur qui eſt conſtante quand le corps décrit un cercle, varieroit en raiſon du quarré de l'arc décrit, puiſque pendant la deſcription d'un arc double, triple, quadruple... &c. le corps recevroit 4, 9, 16... fois plus d'impulſion centrale par la force qui opéreroit ſa peſanteur. Ainſi les principes de M. Bézout, ſont donc entiérement deſtructifs du mouvement circulaire, & on peut les taxer, avec bien plus de raiſon que lui, de *ne pouvoir être admis par les Géomètres*. La meſure de la peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle ne peut donc être ni $\frac{c^2}{2r}$, ni $\frac{c^2}{r}$. Cette meſure ne peut

être que de la nature même de la force conſtante, & uniforme qu'elle repréſentera, par conſéquent proportionnelle au tems, & non point au quarré du tems. Mais une force motrice dont les effets, ou eſpaces qu'elle feroit parcourir, ſeroient proportionnels aux tems, employés à les décrire, eſt évidemment une force dont l'effet eſt réduit à une ſeule & même impulſion communiquée au corps tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible; puiſque quand le corps eſt mû de la ſorte, il parcourt toujours des eſpaces proportionnels au tems employés à les parcourir.

Ainſi quand un corps décrit un cercle, ſa peſanteur n'eſt, & ne peut être que l'effet d'une ſeule & même impulſion qui lui aura été imprimée, par la force centrale, tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible. C'eſt en vertu de cette ſeule impulſion que la peſanteur du corps, & ſes effets ſeront uniformes, dans tous les points de la circonférence du cercle qu'il décrira. Si l'on ſuppoſoit que le corps reçût une ſuite d'impulſions centrales, dans une ſuite de momens; il eſt clair que la vîteſſe de ce corps iroit toujours en augmentant, & que les effets qui en réſulteroient ne pourroient plus être uniformes.

Soit donc un corps C (*Fig.* 24), & OGO, le cercle qu'il devroit parcourir autour du point F; ce corps ne pouvant décrire cette courbe, que par l'effet d'une ſeule & même impulſion centrale CN, qui lui ſeroit communiquée, tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible, comme il vient d'être dit, combinée avec une force de projection CB, qui lui ſeroit imprimée en même tems, & auſſi par l'effet d'une ſeule & même impulſion; il eſt évident que le corps, en vertu de ces deux impulſions, décriroit la ligne droite CMG: Mais devant décrire le cercle OGO, ce ſera une néceſſité qu'il s'appuye ſur le cercle $OMGO$, qui par conſéquent ſera matériel; qu'il roule ſur ce cercle, comme une boule ſur un plan, dans le cas où il ſera de forme ſphérique; & en conſéquence qu'il ſoit animé tout à la fois d'un mouvement de rotation, & d'un mouvement de révolution, puiſque ſon centre C, de peſanteur ſeroit, à tout inſtant, entraîné vers un point M, de la circonférence MGM, ce qui ſeroit le principe de ces deux mouvemens. L'on voit que le mouvement du corps ſe faiſant dans la direction de la diagonale CM, du parallélogramme des forces CN, CB; ce corps

ne pourroit, dans le cas où il ſeroit de forme ſphérique, que tourner ſur lui-même, dans le même tems qu'il parcourroit le cercle *OMGO*.

Voilà comment un corps *C*, peut décrire un cercle *OMGO*, autour d'un point *F*, en vertu d'une ſeule impulſion centrale *CN*, combinée avec une force de projection *CB*. On voit alors que l'effort du corps pour ſe retirer de la direction des tangentes *CB*, eſt conſtant; & que ſi cet effort étoit employé à faire décrire un eſpace au corps, ce corps parcouroit cet eſpace d'un mouvement uniforme.

Mais comme les corps du ſyſtême planétaire ne peuvent être mûs que de cette ſorte, il s'enſuit qu'ils rouleront ſur une orbite matérielle *OMGO*, comme une boule ſur un plan, puiſqu'ils ſont de forme ſphérique, & qu'ils ſeront par conſéquent animés d'un mouvement de rotation, & d'un mouvement de révolution, en parcourant leur orbite, ce qui eſt en effet parfaitement conforme aux obſervations. D'où il ſuit que la courbe qu'ils décriront, ſera une véritable épicycloïde, comme il réſulte encore des mêmes obſervations.

Ainſi l'expreſſion $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ de la peſanteur conduit donc à des vérités utiles dans la partie de l'Aſtronomie phyſique, puiſqu'elle nous fait trouver la véritable maniere dont les corps du ſyſtême planétaire font leur mouvement, ſans en excepter même le mouvement de rotation qu'on n'a pu déduire juſqu'ici d'aucune loi générale; tandis que l'expreſſion $\frac{c^2}{2r}$, ou $\frac{c^2}{r}$ que M. Bézout lui ſubſtitue ne conduit qu'à la ruine même de ces mouvemens, & par conſéquent de toute l'Aſtronomie phyſique.

Application du principe des orbites matérielles à la détermination de la diſtance de la Terre au Soleil.

Nous déterminerons d'abord la diſtance de la terre à la lune. Le rayon du globe terreſtre eſt de $1432\frac{1}{2}$ lieues, qui font 19658064 pieds. Nos graves parcourent proche la ſurface de la terre, environ 54000 pieds dans la premiere minute: faiſant le calcul, on trouvera que nos graves employeroient environ 13 minutes

à parcourir le demi-rayon du globe terreſtre, ou 9829032 pieds.

Mais ſi l'on ſuppoſoit qu'un corps décrivît un cercle à un rayon du centre du globe terreſtre, ce corps circuleroit avec la vîteſſe qu'il auroit acquiſe, après être tombé de la hauteur du demi-rayon du globe de la terre, ou de 9829032 pieds. Ce corps, dans le cours de 13 minutes, décriroit donc un arc égal au rayon du globe de la terre, & par conſéquent, il parcourroit la circonférence entière de ce globe, dans le cours d'environ 81 minutes. Tel eſt le tems que ce corps employeroit à faire ſa révolution autour du centre de la terre.

Mais le tems de la révolution de la lune, autour du même globe, eſt de 39343 minutes, dont le quarré eſt 1547871649; nommant D, la diſtance en rayon de la terre, de la lune au centre de la terre, l'on aura, par la ſeptième Obſervation, l'analogie ſuivante : $81' \times 81' : 1547871649' :: \overline{1}^{3} : D^3$. Donc $D^3 = \frac{1547871649^R}{6561} = 235767^R$: & par conſéquent D, égalera un peu moins de 62 rayons de la terre. La diſtance moyenne de la lune au centre de la terre, ſera donc d'un peu moins que de 62 rayons du globe terreſtre.

Soit actuellement la lune *L*, dans un point de ſon orbite, dont la terre *C*, occuperoit le centre. Ces deux corps tournent enſemble, & d'un mouvement commun autour du ſoleil *F*; puiſqu'ils commencent & achevent en même tems leur révolution : faiſant abſtraction, pour un moment, du mouvement de la lune autour de la terre qui n'a aucun rapport avec ſon mouvement autour du ſoleil, & la ſuppoſant fixe en un point *L* de ſon orbite : ce ſatellite décriroit l'arc *LV*, de ſon orbite, autour du ſoleil, quand la terre *C*, décriroit l'arc *CT*, autour du même aſtre; le mouvement angulaire *LFV*, étant le même pour les deux corps. Donc ces deux corps ſeront mûs d'un mouvement égal à celui que produiroit l'orbite matérielle *LODL* de la lune qui rouleroit ſur le cercle immobile & matériel *OGO*, & qui par ſon mouvement, plus vif en *L*, qu'en *C*, comme plus loin du point *O*, d'attouchement des deux orbites, feroit décrire à la lune l'arc plus grand *LV*, quand la terre décriroit l'arc moindre *CT*. Mais l'orbite mobile *LODL*, en roulant ſur le cercle immobile *OGO*, feroit tourner la terre, placée au centre de cette même orbite, autour de ſon axe, dans

le même tems qu'elle parcourroit ſon orbite *CT*, autour du ſoleil; de ſorte que quand l'orbite mobile *LODL* auroit appliqué tous les points de ſa circonférence ſur la circonférence du cercle immobile *OGO*, la terre auroit fait un révolution autour de ſon axe. Donc le nombre des révolutions de l'orbite mobile ſur le cercle immobile ſera exactement égal au nombre des rotations de la terre.

Mais la terre tourne 365 fois autour de ſon axe, dans le tems d'une ſeule de ſes révolutions autour du ſoleil. Donc l'orbite mobile *LODL*, fera un pareil nombre de révolutions ſur le cercle immobile *OGO*; c'eſt-à-dire, que dans le cours de 365 rotations de la terre, cette orbite s'appliquera 365 fois ſur le cercle immobile *OGO*, & par conſéquent, la circonférence de ce cercle ſera 365 plus grande que la circonférence de l'orbite de la lune *LODL*. Ainſi ces deux circonférences, ou leur rayon *CO*, *OF*, ſeront entr'eux comme le tems de la rotation de la terre eſt au tems de ſa révolution, ou comme 1 à 365: mais $CO = 62$ rayons du globe de la terre; donc $OF = 62^R \times 365 = 22630$ rayons terreſtres. Donc $FO + OC = 22630 + 1 = 22631$

rayons du globe de la terre, ou 32418907 $\frac{1}{2}$ lieues. Ainſi la diſtance de la terre au ſoleil eſt de 32418907 $\frac{1}{2}$ lieues.

Les principes de l'Auteur des Obſervations conduiſent donc à des vérités utiles, dans la partie de l'Aſtronomie phyſique ?

Si la planète *C*, repréſente, par exemple, Vénus ou Mars, faiſant *CO*, eſt à *OF*, comme le tems de la rotation de la planète eſt au tems de ſa révolution ; l'on déterminera par-là les rayons *CO*, *OF*, des deux cercles dont l'un roulant ſur l'autre, opérera toujours le mouvement de rotation, & le mouvement de révolution du globe planétaire. Il eſt évident que quand les planètes ont des ſatellites comme Jupiter & Saturne, le cercle de rotation doit s'étendre juſqu'au dernier ſatellite.

Ces principes font trouver que la diſtance du dernier ſatellite de Jupiter, à la planète centrale, n'eſt que de 155 mille lieues, au lieu de 380 mille, à quoi cette diſtance eſt ordinairement portée.

Le tems de la révolution de Saturne étant connu, ainſi que ſa diſtance au ſoleil ; ſi l'on connoiſſoit exactement ſa diſtance à ſon dernier ſatellite, il eſt évident que l'on pourroit déterminer par ces principes

principes le tems inconnu de ſa rotation. Suivant les calculs actuels, Saturne eſt 300 fois plus éloigné du ſoleil que de ſon dernier ſatellite; le tems de ſa révolution étant d'environ 30 ans, le tems de ſa rotation ſeroit d'environ $\frac{30}{300} = \frac{1}{10}$ d'années ou 36 jours; mais comme ce tems eſt ſûrement trop long par comparaiſon au tems de la rotation des autres planètes, il s'enſuit que le dernier ſatellite de Saturne doit être beaucoup plus près de ſa planète centrale qu'on ne le place communément.

Comme la lune L, préſente toujours la même face à la terre T, les Aſtronomes en ont conclu qu'elle avoit un mouvement de rotation qui s'achevoit préciſément dans le même tems que celui de révolution. Dès lors il faut concevoir ce ſatellite placé au centre L, d'un cercle mobile, & matériel *MANB*, qui rouleroit ſur un cercle immobile & égal *NCEN*; & alors la lune, ſuivant l'impreſſion du cercle mobile *MANB*, décriroit l'orbite *LABL* (*Fig.* 25), autour de la terre T, dans le même tems qu'elle tourneroit ſur elle-même, & la vîteſſe *LD*, qui lui ſeroit imprimée, ainſi qu'au cercle *MANBM*, étant telle que ce cercle employât envi-

ron 27 jours à faire ſa révolution ſur le cercle immobile & égal *NCEN*, il eſt manifeſte que les deux mouvemens de révolution & de rotation de ce ſatellite s'acheveroient dans ce même eſpace de 27 jours.

Il faut obſerver que la lune ne peut décrire une orbite régulière autour de la terre, à cauſe qu'elle tourne en même tems autour de deux centres; ſavoir, autour du ſoleil, par un mouvement qui lui eſt commun avec la terre, & autour de la terre par un mouvement qui lui eſt particulier. Mais en tournant autour de la terre, elle ſe trouve néceſſairement tantôt plus loin, tantôt plus près du ſoleil que la terre, ce qui fait varier à tout inſtant ſa force centripète vers le ſoleil; car cette force eſt tantôt plus grande que celle de la terre vers le même aſtre, & tantôt plus petite, & par-là ſa force centripète vers la terre varie auſſi; puiſqu'il eſt évident que quand la lune aura plus de tendance vers le ſoleil, elle en aura d'autant moins vers la terre, & quand au contraire ſa tendance vers le ſoleil ſera moindre, ſa force centripète vers la terre ſera plus grande. D'où il ſuit que toutes les variations de ce ſatellite ne peu-

vent procéder que de ſa tendance vers deux centres différens, le ſoleil & la terre, autour deſquels elle doit achever ſes deux révolutions en différens tems; ſavoir, en 365 jours autour du ſoleil, & en 27 jours environ, autour de la terre.

L'on voit par-là comment M. Newton eſt parvenu à une explication aſſez heureuſe des mouvemens de la lune, par la loi des deux centres vers leſquels il fait, avec raiſon, tendre ce ſatellite : mais la raiſon de cette tendance dérive du mouvement de révolution de ce ſatellite autour de ces deux centres; car la lune ne tend vers le ſoleil, que parce qu'elle tourne autour de cet aſtre, de même qu'elle ne tend vers la terre, que parce qu'elle tourne autour de ce globe; & cette double révolution, autour de ces deux centres, ſuppoſe une double tendance vers ces mêmes centres, d'où procédent néceſſairement toutes les variations que les Aſtronomes remarquent dans les mouvemens de ce ſatellite.

REMARQUE.

Au reſte, cette révolution des corps céleſtes, ſur la circonférence d'orbites

matérielles, eſt celle même à laquelle on ſera toujours ramené, lorſqu'on aura conſidéré toute choſe dans le mouvement des corps autour de leur centre de tendance; mais principalement la diminution perpétuelle de l'action tangentielle, cauſée par la peſanteur, dans l'hypothèſe où les corps ſeroient mûs ſans s'appuyer ſur de telles orbites. Quand un corps circule autour d'un centre *C* (*Fig.* 4), les forces centripète & centrifuge *BO*, *BD*, étant en oppoſition; l'on doit concevoir qu'à tout inſtant la force de la peſanteur *BO*, détruit la partie *BD* de force centrifuge qui lui eſt contraire & égale; enſorte que, dans le cours d'une ſeule demi-révolution *ABE*, l'action tangentielle devroit ſe trouver conſidérablement diminuée, par les pertes que la force de la gravité lui auroit fait éprouver, pendant ce même tems; enſorte que le mobile, parvenu en *E*, n'auroit plus aſſez de force pour retourner au point *A*, du départ; c'eſt même ce que l'on éprouve quand on fait tourner un corps en rond, comme la pierre dans la fronde, ſi la main n'ajoute pas, à tout inſtant, de nouveaux degrés de vîteſſe dans la direction de la tangente, la pierre n'a plus aſſez de force pour re-

monter au point le plus élevé de la circonférence, quand même on auroit égard à la réſiſtance de l'air, & que l'on ſuppoſeroit que ce mouvement s'exécuteroit dans le vuide; car la force des degrés de vîteſſe que la main ajoute de moment en moment, pour que le mouvement de révolution de la pierre puiſſe continuer, ſurpaſſe de beaucoup l'action de l'air contre la pierre. Ainſi la perpétuité du mouvement de révolution, autour du centre de peſanteur des corps circulans, ſoit par la circonférence d'un cercle, ou d'une ellipſe, eſt uniquement fondée ſur l'hypothèſe que la force de la gravité ne retrancheroit jamais rien à l'action de la force tangentielle; ce qui eſt une hypothèſe abſolument fauſſe, qu'on a cherché à étayer d'une mauvaiſe démonſtration, en prétendant, d'après le parallélograme des forces ou d'autres procédés qui ne ſont pas plus exacts, que la force par la tangente étoit infiniment grande, à l'égard de la force de la gravité, & qu'ainſi celle-ci ne pouvoit faire perdre à celle-là qu'une force infiniment petite dans un tems fini, ce dont nous avons démontré toute l'abſurdité, par notre ſeconde & troiſième Obſervations. Nous avons même prouvé que nom-

mant C, la circonférence du cercle décrit; ces deux forces, loin d'être entr'elles dans un rapport infini, étoient comme C, à $\sqrt{3\frac{1}{7}}\,C$. On doit conſidérer la peſanteur dans un corps, comme l'obſtacle que la force par la tangente doit perpétuellement ſurmonter : or une force ne peut ſurmonter un obſtacle qui lui réſiſte qu'à ſes propres dépens, & en perdant à chaque inſtant la partie de force qu'elle employeroit pour le vaincre. Nommons F, la force par la tangente; P, la peſanteur ou réſiſtance du corps. La force étant F, au commencement du premier tems t, ne ſera plus, à la fin de ce tems, que $F-P$, & ſucceſſivement $F-2p$, $F-3p$, $F-4p$... &c. à la fin du ſecond, troiſième, quatrième... &c. tems t. Donc à la fin l'on auroit $F-np=0$; d'où on tireroit cette égalité $F=np$, & par conſéquent, $\frac{F}{p}=n$. Ainſi $\frac{F}{p}$, ou la force diviſée par l'obſtacle, ſeroit égale au nombre n, de tems t, de la durée de la force; c'eſt-à-dire, que l'obſtacle, ou la peſanteur p, auroit détruit la force, ou mouvement F, par la tangente, à la fin d'un tems nt au plus tard. Ce tems même peut être fort abrégé

dans pluſieurs cas, comme quand le corps s'approche du centre.

On voit que $\frac{F}{p}$, eſt véritablement l'expreſſion du tems de la durée de la force ; car ce tems ſeroit d'autant plus long, ou d'autant plus court, que l'obſtacle, ou la peſanteur p, qu'on ſuppoſe toujours conſtant ſeroit moindre, ou plus grand à l'égard de la force F; puiſque ce tems ſeroit infini, dans le cas où l'obſtacle, ou la peſanteur p, ſeroit infiniment petit à l'égard de la force F, ainſi qu'il devroit, en effet, arriver dans ce cas : par conſéquent, dès que la force p, de la gravité devroit finir par détruire entiérement le mouvement de projection AT, il s'enſuit que le mobile ne pourroit jamais faire une ſeule révolution ABA (*Fig.* 4), autour du centre C, de peſanteur, puiſqu'il parviendroit bientôt vers un point où ſe termineroit ſon mouvement tangentiel ; enſorte qu'il reſteroit livré à l'action de ſa ſeule peſanteur qui le précipiteroit vers ſon centre C, de tendance. Si donc les corps du ſyſtême ſolaire étoient mûs, comme on le dit, ſans rouler, ou gliſſer ſur des orbites matérielles ; ces corps n'auroient jamais pu faire une ſeule révolution, autour du

ſoleil ; leur centre commun de peſanteur ; ce qui eſt la plus grande difficulté que préſente ce ſyſtême, & celle qu'il ne faut ceſſer de lui oppoſer, pour en montrer toute l'abſurdité. Cette conſéquence eſt même avouée par les plus ſavans Newtoniens ; ou, pour mieux dire, c'eſt eux-mêmes qui la tirent du principe que *la force centripète doit être en rapport fini avec le mouvement tangentiel. Cette propoſition*, diſent-ils, *eſt evidemment fauſſe, puiſque ſi elle étoit vraie, le corps à chaque inſtant s'écarteroit de la direction précédente d'un angle fini ; ce qui le feroit, au bout de quelques inſtans, tomber dans le centre des forces.* C'eſt ce qu'écrivoit à l'Auteur, un des plus célèbres Newtoniens.

Il faut convenir que voilà une ſingulière manière de raiſonner, & de prouver qu'une propoſition eſt *évidemment fauſſe.* On nie la poſſibilité de la perpétuité du mouvement de révolution, quand le corps circuleroit autour du centre des forces, ſans s'appuyer ſur des orbites matérielles ; & les Newtoniens prennent pour preuve de la fauſſeté de cette propoſition, le défaut même de perpétuité dans le mouvement de révolution qu'on reproche à leur méthode, & dont ils avoient à ſe juſtifier.

On accorde assurément que, par cette méthode, le corps à *chaque instant s'écarteroit de la direction précédente d'un angle fini, ce qui le feroit tomber bientôt dans le centre des forces*, & cela par la raison très-simple que le mouvement tangentiel décroissant à chaque instant, la force de la gravité auroit toujours un plus grand effet sur ce mouvement; ce qui inclineroit toujours davantage, en tems égal, sa direction sur le rayon vecteur; & dès-là l'angle formé par ce rayon, & cette direction étant toujours moindre, la force centrale du corps en seroit augmentée; ce qui rapprocheroit toujours davantage le corps de son centre de pesanteur, ainsi qu'il a été prouvé; d'où suivroit une augmentation en tems égal de l'action de la force centrale sur le mouvement tangentiel, ensorte que la force centrale croissant toujours aux dépens du mouvement tangentiel, ce mouvement seroit bientôt détruit.

On a senti ici toute la force de la difficulté; & pour la prévenir, on a été forcé d'adopter un principe évidemment erroné; savoir, *que la force centripète n'étoit jamais qu'une grandeur élémentaire, ou, si l'on veut, infiniment petite par rapport à la vîtesse du corps, & que lorsqu'on for-*

moit un parallélogramme, dont un côté repréſentoit la vîteſſe du corps, & l'autre la force centripète; il falloit que ce dernier côté fût infiniment petit par rapport au premier. C'eſt ce qu'écrivoit encore à l'Auteur le même Géomètre, dont il vient d'être parlé, & ce qu'on trouve conſigné dans tous les ouvrages des Géomètres Newtoniens.

Mais d'abord comment ſait-on que la force centripète n'*eſt qu'une grandeur élémentaire, ou infiniment petite, par rapport à la force tangentielle du corps?* Les forces ne peuvent être connues que par leurs effets. Le rapport de ces effets, en tems égal, pourra donc exprimer le rapport des forces. L'on vient de voir que ſi un corps circuloit à un rayon *AC*, du centre *C* (*Fig.* 4), de la terre; ce corps, dans l'eſpace de 13 minutes, décriroit un arc égal au rayon *AC*, du globe de la terre, ou 19658064 pieds, d'un mouvement uniforme; tandis que la force accélératrice lui feroit parcourir, dans le même tems, la moitié de cet eſpace ou 9829032 pieds, & la peſanteur la racine quarrée de ce dernier eſpace, ou 3136 pieds environ, d'un mouvement également uniforme, pendant le même tems de

13 minutes. Les deux forces ſeront donc entr'elles, comme 19658064 eſt à 3136; c'eſt-à-dire, environ comme 6268 à l'unité. Il eſt donc faux que la peſanteur, ou *force centripète, ne ſoit qu'une grandeur élémentaire, ou infiniment petite, à l'égard de la force de projection, ou de la viteſſe du corps*, puiſque cette force, proche la ſurface de la terre, ſeroit à la force de projection, comme 1 à 6268; c'eſt-à-dire, que quand la peſanteur feroit parcourir un pied à un corps, proche la ſurface de la terre, la force de projection lui en feroit décrire environ 6268.

Il en ſeroit de même ſi l'on comparoit les deux forces relativement au mouvement de la terre autour du ſoleil; faiſant le calcul, on trouveroit que la force de la peſanteur, eſt à celle de projection, comme l'unité à 8051, environ; c'eſt-à-dire, que quand la peſanteur feroit parcourir un pied à la terre, la force de projection lui en feroit décrire environ 8051. Cette derniere force ſeroit donc plus grande, à l'égard de la peſanteur, autour du ſoleil, & à environ 32418907 $\frac{1}{2}$ lieues de cet aſtre, qu'elle ne ſeroit autour du centre du globe terreſtre, à un rayon de ce même globe. A ſuppoſer donc que

la force de projection fût toujours plus grande à l'égard de la force de la gravité, à proportion que le corps circuleroit toujours plus loin de ſon centre de peſanteur; l'on voit, qu'afin que cette premiere force pût être infiniment grande, par rapport à la ſeconde, il faudroit que le corps circulât à une diſtance infinie de ſon centre de tendance; & c'eſt là, en effet, ce que l'on ſuppoſe, lorſque l'on détermine le rapport de ces forces, à l'égard d'un arc AB (*Fig.* 4), ſuppoſé infiniment petit, puiſqu'alors cet arc devient, ainſi qu'il a été prouvé, un véritable arc de parabole; l'équation $y^2 = ax - x^2$, ſe réduiſant alors à $y^2 = ax$, qui eſt l'équation à un arc de parabole; & dès-là les tendances du corps étant parallèles ne coincideroient que vers un centre infiniment éloigné. Donc alors la force centripète AN, devient infiniment petite, à l'égard de la force de projection AD. Quand on détermine donc le rapport de la vîteſſe AD, avec la force centripète AN, relativement à un arc AB, ſuppoſé infiniment petit, l'arc circulaire ſe trouve alors transformé en un arc de parabole, & le centre de tendance devient infiniment éloigné. La force centripète du

corps eſt donc alors néceſſairement infiniment petite : mais il eſt évident que cette force devient finie, quand le centre de peſanteur ſe trouve dans un point C, placé à une diſtance finie du corps A ; & qu'ainſi cette force ne peut plus avoir qu'un rapport fini avec la force de projection AD, du corps.

Il eſt donc de la derniere fauſſeté de prétendre qu'un corps de dimenſions finies, qui circuleroit à une diſtance finie de ſon centre de peſanteur, *n'auroit jamais qu'une force centripète infiniment petite, par rapport à ſa force de projection, où à ſa vîteſſe.* L'abſurdité de cette propoſition ſaute aux yeux, & ſe manifeſte par ſon ſeul énoncé ; car on ſent que quand le globe terreſtre, par exemple, ne peſeroit qu'une livre ſur le ſoleil, cette peſanteur auroit encore un rapport fini avec ſa force de projection, bien loin d'être infiniment petite, à l'égard de cette derniere force. Il n'eſt pas difficile de prouver tout ce que l'on veut à l'aide de cette foule de principes erronés de nos Géomètres Newtoniens. S'il eſt donc démontré, comme il l'eſt en effet, que la force centripète ne peut avoir qu'un rapport fini avec la force de projection d'un corps

de dimenſions finies qui circuleroit à une diſtance finie de ſon centre de peſanteur; il s'enſuit inconteſtablement, par l'aveu même des Géomètres Newtoniens, que le corps, *à chaque inſtant*, circulant ſans s'appuyer ſur des orbites matérielles, *s'écarteroit de la direction précédente d'un angle fini, ce qui le feroit tomber dans le centre des forces, au bout de quelques inſtans*, & en conſéquence que ce n'eſt point ainſi que les corps du ſyſtême ſolaire ſeront mûs, mais en s'appuyant ſur des orbites matérielles, ſur leſquelles ils feront leur révolution, ce qui les empêchera *de tomber dans le centre des forces.*

Soit donc une orbite matérielle *ANDMA*, de forme elliptique; *F*, le foyer de cette orbite, en même tems centre de peſanteur d'un corps *A* (*Fig.* 26): ſi on vient à imprimer à ce corps un mouvement de projection de *A* en *B*, capable de le faire ſortir du point *A*; ce corps dans un tems *t*, ira de *A* en *Q*; dans un ſecond tems *t*, il décrira l'arc d'ellipſe *QN*, enſuite les arcs *NS*, *SD*. Mais ce corps, en deſcendant de *A* en *N*, ſera mû d'un mouvement accéléré, puiſqu'il ſeroit toujours plus près de ſon centre *F*, de tendance; enſorte que parvenu en *D*, il auroit acquis une vîteſſe,

qu'il ne pourroit perdre qu'en autant de tems qu'il auroit employé à l'acquérir, & qui le rameneroit par conſéquent de *D*, au point *A*, du départ, dans le même tems préciſément qu'il auroit employé à aller de *A* en *D*, ſon mouvement étant autant retardé qu'il avoit été accéléré en deſcendant de *A* vers *D*. Dans le cas où ce mobile ſeroit de forme ſphérique, il ſera animé en même tems d'un mouvement de rotation, comme les corps planétaires, ainſi qu'il a été obſervé ; & dans le cas où la forme ſeroit irréguliere, telle que celle des comètes, le corps, par le ſeul effet de ſa peſanteur, gliſſera, au lieu de rouler, ſur la circonférence *ANDMA*, de l'orbite matérielle : car il eſt manifeſte que ce corps, une fois ſorti du point *A*, ne pourroit reſter fixe ſur aucuns points *Q*, *N*. . . &c. de l'ellipſe *ANDMA*, puiſque ſa tendance *QF*, *NF*. . . . &c. le feroit néceſſairement rouler ou gliſſer ſur la circonférence de cette même ellipſe. On voit par-là que les corps qui circuleroient ſur la circonférence d'une ellipſe plus excentrique, & dont le grand axe *AD*, ſeroit plus grand, doivent avoir une très-grande vîteſſe vers le point *D*, de leur périhélie, comme il arrive aux comètes.

On voit auſſi que ces corps peuvent tourner dans tous les ſens poſſibles, puiſqu'il ſuffiroit que le mouvement de projection *AB*, leur fût imprimé ſuivant la direction quelconque des orbites matérielles, ſur leſquelles ces corps feroient leur révolution.

Si l'on ſuppoſoit enfin que les ſurfaces, tant des corps circulans, que des orbites matérielles, fuſſent infiniment polies, enſorte que le frottement du corps circulant, contre la ſurface de l'orbite matérielle, pût être conſidéré comme nul, ou à peu près; il eſt clair que la vîteſſe du corps ſeroit ſenſiblement la même d'une révolution à une autre révolution; & qu'ainſi les corps du ſyſtême ſolaire pourroient faire un très-grand nombre de révolutions ſur ces orbites, ſans que leur mouvement en parût altéré.

Telle eſt la maniere de concevoir le mouvement de révolution des corps du ſyſtême ſolaire, & la ſeule que la Géometrie puiſſe avouer; à laquelle on eſt conduit par une ſuite de principes rigoureuſement démontrés, qui mettent dans le plus grand jour, & l'extrême ſimplicité de ces mouvemens, & la foule de propoſitions fauſſes & abſurdes, dont M. Newton, & ſes

ſes diſciples après lui n'ont ceſſé de faire uſage pour étayer le ſyſtême d'une gravitation univerſelle, dont tout décele le ridicule, & l'abſurde.

Pluſieurs Géomètres ont remarqué, même depuis long-tems, que la force de projection AB, ne pouvoit tout au plus que ſuſpendre pour un tems la chûte du corps A, dans ſon centre F, de tendance, lorſque le corps circuleroit ſans être ſoutenu, & que le corps devoit toujours finir par être ramené au centre de peſanteur F, dans un tems plus long, ou plus court; ſoit par la droite AF, dans le cas, où il ſeroit abandonné à l'action de ſa ſeule gravité, & privé de toute action tangentielle AB; ſoit par une courbe, plus grande ou plus petite $ANSF$, qui ne pouvoit être qu'une ſpirale, dans le cas où la force de la gravité AF, ſe compliqueroit avec une force par la tangente AB. La propoſition de ces Auteurs eſt certainement inconteſtable, mais ils ne l'ont pas ſuffiſamment démontrée; cette propoſition n'eſt vraie que parce que le mouvement tangentiel AB, imprimé dans l'origine du mouvement, doit décroître à tout inſtant par l'action de la gravité, ce qui doit incliner toujours davantage la direction AB,

QP, *NT*.... &c. de ce mouvement ſur le rayon vecteur *AF*, *QF*, *NF*.... &c. par conſéquent accroître la force centripète du corps, & diminuer d'autant ſa force centrifuge. Ainſi la force centripète du corps, ayant augmenté, en tems égal, de *A*, vers *Q*, *N*, *S*... &c, & les rayons vecteurs ayant toujours diminué, ainſi que la force centrifuge du corps, il eſt évident que le corps ne pourroit que parvenir au centre *F*, de peſanteur, puiſque l'accroiſſement progreſſif de force centripète détruiroit toute force centrifuge, & que dès-lors le corps ne pourroit remonter vers *A* au-deſſus du centre *F*, de peſanteur, par l'excès de ſa force centrifuge ſur ſa force centripète, comme il ſeroit néceſſaire; puiſque cette premiere force, loin de ſurpaſſer la premiere, ſeroit détruite par elle. Voilà la véritable cauſe de la chûte de tout mobile vers ſon centre *F*, de peſanteur, lorſque ce mobile ſeroit ſuppoſé circuler autour de ce centre, ſans être ſoutenu. Sur quoi il convient encore d'obſerver qu'il ne ſeroit pas toujours vrai que le corps décriroit une courbe, depuis le point *A*, d'où il ſeroit parti, juſqu'au centre *F*, de peſanteur, où ſe termineroit ſon mouvement, parce qu'il pourroit

arriver que la force de la gravité eût détruit la totalité du mouvement de projection, dans quelque point Q, ou N, de la courbe décrite AQN, & dès-lors le corps tomberoit de Q, ou N, dans son centre F, de tendance, par la ligne droite QF, ou NF, après avoir décrit les arcs AQ, ou AN. Il est évident que ce cas auroit lieu toutes les fois que la force de projection AB, ne seroit pas imprimée en proportion de la distance où le corps A, seroit de son centre F, de pesanteur, mais en moindre degrés. On voit qu'alors ce mouvement seroit détruit dans quelque point Q, ou N, de la courbe, & avant que cette courbe fût arrivée au centre F, de tendance. Par exemple, une pierre A, lancée avec la main, dans la direction de la tangente AB, & tendant vers le centre F, de la terre dont elle seroit distante d'environ quinze cent lieues, ne pourroit évidemment décrire que quelques arcs de courbe AQ, AN, & pendant les premiers instans de son mouvement ; le mouvement par la tangente AB, étant bientôt détruit par l'action de la pesanteur de la pierre, & par le décroissement considérable des angles FAB, FQP, FNT... &c ; la pierre, après avoir

parcouru les arcs *AQ*, ou *AN*, étant privée de tout mouvement de projection, tomberoit en ligne droite vers ſon centre *F*, de peſanteur, ſi ce globe ſe trouvoit percé juſqu'à ſon centre *F*, dans le lieu où la pierre atteindroit la terre. Afin donc que la courbe décrite pût s'étendre juſqu'au centre *F*, de peſanteur du corps, il eſt manifeſte qu'il faudroit conſidérablement augmenter le mouvement de projection *AB*, de la pierre, (*Fig.* 27) en ſuppoſant que ce mouvement fût tel, par exemple, que la pierre pût parcourir une tangente *AT*, d'un mouvement uniforme, & égale à la demi-circonférence d'un cercle *ADB*, dans un tems *t*, égal à celui qu'employeroit la peſanteur à lui faire décrire, d'un mouvement également uniforme, le rayon *AC*, du demi-cercle *ADB*: il eſt clair que la courbe décrite ſeroit la ſpirale *AEMNC*, puiſque la pierre n'ayant point de force centrifuge, par la diminution en *E*, *M*, *N*.... &c. de l'angle formé par la tangente & le rayon vecteur, rien n'empêcheroit le mobile de couler ſur le rayon qui décroîtroit par conſéquent de *A*, vers *E*, *M*, *N*.... &c., juſqu'au centre de peſanteur *C*, où il finiroit par s'anéantir.

Si donc la pierre, ou corps quelconque *A*, décrivoit une ſpirale *AEMNC*, dans le cas où ſa force de projection *AT*, ſeroit imprimée de telle ou telle ſorte ; il s'enſuit que la même nature de courbe ſeroit toujours décrite par le mobile, qu'elle que pût être ſuppoſée la force de projection *AT*, plus grande, ou plus petite ; puiſque le plus ou le moins de force de projection ne pourroit avoir d'autre effet que de faire décrire des arcs de ſpirale plus longs, ou plus courts, en tems égal : & delà il s'enſuit que les arcs *AE*, *AM*... &c. décrits par des corps quelconques lancés de deſſus la ſurface, par exemple, de la terre, ne ſont, & ne peuvent être au fonds que des arcs de ſpirale, & nullement des arcs de parabole ; car le mouvement parabolique ſuppoſe deux choſes ; 1°, que la diſtance du corps à ſon centre de peſanteur ſeroit infinie, ce qui eſt une ſuppoſition chimérique ; 2°, que le mouvement de projection du corps ſeroit toujours le même, & ne ſeroit pas diminué par l'action de la gravité, ce qui n'eſt pas moins chimérique au fonds ; retranchons ces deux chimères. Que le centre de tendance, ſoit ſuppoſé à une diſtance finie du corps, & que le mouvement tangentiel décroiſſe

en tems égal par l'action de la gravité ; & le mouvement parabolique ſera transformé en mouvement ſpiral ; puiſque les tendances coïncideroient vers un centre *C*, placé à une diſtance finie du corps *A* ; & que les rayons vecteurs *CA*, *CE*, *CM*... &c. loin de croître, décroîtroient au contraire en tems égal, juſqu'à finir par s'anéantir au centre *C*, de peſanteur du corps. Mais comme la force de la peſanteur ſe change en force accélératrice, lorſque le corps tombe vers ſon centre de tendance, & qu'il ceſſe d'être ſoutenu, l'on voit que la courbe *A o b f C* que décriroit le mobile ſeroit une ſpirale, engendrée par la combinaiſon de deux mouvemens uniformément accélérés ; l'un par le rayon qui feroit parcourir au corps les eſpaces *d o*, *e b*, *a f*, *B C*, proportionnels aux quarrés des tems employés à les parcourir ; & l'autre angulaire qui lui feroit décrire, dans les mêmes tems, les angles *A c d*, *A c e*, *A c a*... &c, dont les arcs *A d*, *A e*, *A a*... &c. ſeroient la meſure, leſquels angles ſeroient également proportionnels, ainſi que leur meſure, aux quarrés des mêmes tems.

Telle eſt donc, dans le fait, la courbe que décriroit tout mobile *A*, qui circule-

roit, ſans être ſoutenu, autour de ſon centre *C*, de peſanteur; ce qui démontre de nouveau que les corps du ſyſtême ſolaire ne peuvent circuler autour du ſoleil, leur centre commun de peſanteur, qu'en roulant ou gliſſant ſur des orbites elliptiques & matérielles, comme il vient d'être dit.

Si l'on conſulte enſuite les Obſervations, l'on verra que ces orbites matérielles ſont les ſeules qui puiſſent être ſuſceptibles de mouvemens, de nœuds, d'inclinaiſons, de variations; puiſque ſi ces orbites étoient de ſimples lignes mathématiques, elles n'auroient aucune exiſtence phyſique, & que dès-là il ſeroit impoſſible de rendre raiſon des mouvemens, des nœuds, des inclinaiſons, & des différentes variations qu'on peut leur attribuer pour expliquer les phénomènes céleſtes; d'autant plus qu'on eſt toujours forcé de ſuppoſer ces mouvemens dans les orbes des planètes, ſecondaires ſur-tout, comme la lune; & que ce n'eſt que par inconſéquence, qu'on n'en conclut pas leur matérialité, & par conſéquent leur exiſtence phyſique. En faiſant donc rouler ou gliſſer les corps du ſyſtême ſolaire ſur des orbites matérielles, ſuſceptibles par conſéquent par elles-mê-

mes de mouvemens, de nœuds, d'inclinaiſons & de différentes variations, tous les phénomnèes céleſtes s'expliquent d'une maniere fort ſimple, & fort géométrique; puiſqu'il en réſulte un mouvement de révolution autour de tous les centres de tendance, un mouvement de rotation en même tems de la part de tous les corps circulans, dont la forme ſeroit ſphérique; & des nœuds, des inclinaiſons, & différentes variations, dans les orbès des planètes ſecondaires qui ſont toujours mues autour de deux centres; ſavoir, le ſoleil, & leur planète centrale.

II. Remarque.

Quoiqu'il ſoit permis en Géometrie de conſidérer les courbes comme des poligones d'une infinité de côtés infiniment petits; il eſt néanmoins facile de prouver que cette idée, qui n'eſt au fond qu'une ſimple hypothèſe admiſe principalement dans la méthode de la rectification des courbes, ne peut avoir lieu, lorſqu'il s'agit de leur génération réelle & phyſique, & de leur deſcription par le mouvement des corps de dimenſions finies. En effet, ſoit la courbe *ACN* (*Fig.* 28), conſidérée comme

poligone, & ſuppoſée décrite par un corps A, de dimenſions finies, en vertu d'une force centrale AF, tendante vers un même point F, combinée avec un mouvement AM, dans la direction de la tangente ABM. La courbe étant ſuppoſée poligone, le petit arc AC, pourra être conſidéré comme rectiligne, & par conſéquent, comme produit par la combinaiſon de deux impulſions AB, AD, dont l'effet ſeroit de faire décrire au corps A, la diagonale AC, du parallélogramme $ADBC$; & comme il en ſeroit de même à tous les angles du poligone, il s'enſuit que la force centrale AF, qui eſt de ſa nature une force continue, qui agiroit continuellement ſur le mobile, & ſans diſcontinuation, même pendant le cours d'un tems infiniment court, réduiroit ſon effet à des impulſions AD, ſucceſſives, ſéparées entr'elles par de petits eſpaces de tems; enſorte que le corps ne recevroit au commencement de chaque petit tems t, qu'une ſimple impulſion, au lieu d'une ſomme infinie de petites impulſions que la force centrale lui communiqueroit, en effet, dans le cours du même tems t. Ainſi l'hypothèſe d'une force centrale qui n'agiroit ſur le corps qu'à chaque angle du poli-

gone infini-latéral, & qui ſuſpendroit ſon action pendant tout le tems qu'il employeroit à décrire chaque côté de ce poligone, eſt en ſoi fauſſe, & contraire à la nature d'une force continue, qui ne peut être conçue mettre la plus petite interruption dans ſon action.

De cette hypothèſe fauſſe en ſoi, réſultent pluſieurs autres fauſſetés; ſavoir, la premiere, de transformer en force uniforme, qui feroit parcourir au corps des eſpaces AD, proportionnels au tems t, employé à les décrire, une force de ſa nature accélératrice conſtante, qui feroit parcourir, dans le même tems t, des eſpaces AD, proportionnels au quarré t^2, du même tems, employé à les décrire. Ce qui fait une énorme différence, tant dans les eſpaces parcourus, que dans leur rapport avec les tems employés à les parcourir; & la ſeconde, de faire modifier, ce qui eſt abſurde, à chaque inſtant infiniment petit, la force finie AB, dans la direction de la tangente, par l'action AD, d'une force centrale infiniment petite; car à l'origine de la courbe, AD, eſt infiniment petite, à l'égard de AB; mais l'effet d'une force centrale AD, infiniment petite, à l'égard d'une force finie AB, eſt à chaque inſtant

nul à l'égard de cette force ſinie, préciſément comme le ſeroit l'impulſion centrale d'une puce, ſur le globe *A*, de la terre emportée, dans la direction de la tangente *AM*. Il eſt clair que l'impulſion centrale de cette puce, répétée même à chaque inſtant infiniment petit, ne produiroit aucun effet ſur le globe terreſtre *A*, entraîné par une force finie dans la direction de la tangente *AM*, & que la terre pourſuivroit ſon chemin, dans la direction rectiligne de cette tangente, ſi elle ne recevoit à chaque inſtant que l'impulſion centrale de cette puce, ou, ce qui revient au même, ſi l'impulſion centrale qui devroit la détourner de ſa direction rectiligne *ABM*, étoit, à chaque inſtant, infiniment petite à l'égard de l'impulſion par la tangente *ABM*; afin donc que la terre puiſſe être détournée de la direction de cette tangente, c'eſt une néceſſité, que les deux forces ſoient en rapport fini. Que ſi l'impulſion par la tangente lui faiſoit parcourir un eſpace, par exemple, *AB*, dans un tems *t*; l'impulſion centrale pût lui faire parcourir, dans le même tems, un eſpace *AD*, qui ſeroit en rapport fini avec l'eſpace *AB*; dès-lors la terre, par ces deux impulſions com-

binées, parcourroit la diagonale AC, du petit parallélogramme $ABCD$, & par conſéquent, quitteroit à la fin de chaque tems t, la direction de la tangente AB : voilà comment la terre ſeroit à tout inſtant retirée de la direction de cette tangente, par l'effet d'une impulſion centrale AD, qui ſeroit en rapport fini avec l'impulſion tangentielle AB; mais alors la terre ne décriroit point une courbe, parce que dès que AB & AD, ſeroient en rapport fini, ce globe, à la fin de chaque tems t, s'éloigneroit néceſſairement de la direction de la tangente ABM, de la valeur d'un angle fini BAC, ce qui le feroit même bientôt tomber dans le centre F, des forces. D'où il ſuit clairement qu'un corps ne peut jamais décrire une courbe, conſidérée comme poligone d'une infinité de côtés, par l'effet de deux impulſions AB, AD, dont l'effet ſeroit de lui faire parcourir la diagonale, ou petit côté AC, de la courbe; car ou AD ſera en rapport infini, avec AB, ou en rapport fini. Dans le premier cas, la force centrale étant, à tout inſtant, infiniment petite, à l'égard de la force tangentielle AB, ne pourroit la modifier; ſon effet étant nul à tout inſtant, le corps ſeroit emporté

dans la direction de cette tangente *ABM*; & dans le ſecond cas, les deux forces *AB*, *AD*, étant en rapport fini, le mobile, à la fin de chaque tems infiniment petit *t*, s'écarteroit, de la valeur d'un angle fini *BAC*, de la direction de la tangente *ABM*, & par conſéquent ne pourroit encore décrire une courbe. Ainſi rien de plus faux que la génération des courbes *ACN*, conſidérées comme poligones d'une infinité de côtés, & ſuppoſées décrites par l'action de deux forces combinées *AB*, *AD*, qui ſeroient toutes les deux uniformes, pendant le cours de chaque inſtant *t*. Un corps ne peut donc décrire qu'une courbe rigoureuſe, & non poligone par l'action de la gravité, compliquée avec une force de projection. On voit même, à l'inſpection de la figure, que le parallélogramme *ADBC*, ne peut avoir lieu, lorſque la force centrale *AD*, ſera exprimée comme elle doit l'être, comme une force continue, accélératrice, au lieu de l'exprimer comme une force uniforme qui feroit décrire au corps uniformément l'eſpace *AD*, tandis que la force tangentielle lui feroit parcourir uniformément l'intervalle *AB*: il eſt clair que dès que l'eſpace *AD*, ſera conſidéré,

comme on le doit, comme décrit d'un mouvement accéléré, dès-lors le parallélogramme $ADBC$, ne peut ſubſiſter, & l'on ne peut plus dire que l'arc AC, de la courbe, en ſeroit la diagonale ; car l'eſpace AB, étant comme le tems t, & l'eſpace AD, comme le quarré t^2, du même tems, l'on voit qu'il devient abſurde de prétendre que l'on aura un parallélogramme, formé d'un côté AB, exprimable par t, & d'un côté AD, exprimable par t^2, comme on l'a déja obſervé.

On part d'ailleurs ici d'un principe faux, en ſuppoſant, comme font les Newtoniens, que *ce n'eſt jamais que par degrés que les forces produiſent leurs effets.* L'effet par lequel la force centrale détourne, à tout inſtant, le corps de la direction de la tangente n'eſt pas produit par degrés, mais tout à la fois, & dans un inſtant indiviſible. Or, le corps à détourner ayant à tout inſtant une force finie dans la direction de la tangente, ne pourra évidemment être détourné de cette direction que par une force de même nature. Ce détour, dans un inſtant infiniment petit, ne fût-il que de l'épaiſſeur d'un cheveu, la force qui le produiroit ſeroit toujours en rapport fini avec la force tangentielle.

Ce n'eſt donc pas de cette ſorte que le mouvement d'un corps, autour d'un point fixe, doit être engendré. Il faut concevoir que de la force tangentielle *ABM*, réſulte une force centrifuge *OB*, (*Fig.* 29), qui eſt en oppoſition avec l'action *od*, de la gravité, & dans la direction d'une même ligne droite *BodF*; enſorte que le corps *A*, étant toujours mû entre les deux forces contraires *OB*, *od*, comme il a été déja obſervé, ne pourroit ſuivre la direction de la tangente *ABM* qu'autant que la force centripète *od*, ſeroit infiniment petite à l'égard de la force centrifuge *OB*; parce qu'alors cette premiere force étant comme nulle à l'égard de la ſeconde, ſon effet *od*, ſeroit nul à l'égard de l'effet *OB*. Donc alors le point *O*, parviendroit en *B*, & par conſéquent, le mobile, au lieu de décrire l'arc *AO*, parcourroit la tangente *AB*.

Mais dans le cas où les forces centrifuge & centripète *OB*, *od*, ſeront en rapport fini, il eſt clair que le mobile doit être retiré à tout inſtant de la direction de la tangente *ABM*, & qu'il parviendra dans quelque point *O*, hors de la tangente *ABM*; & ce point *O*, ſera d'autant plus diſtant de cette tangente, que la force cen-

tripète $o\,d$, ſeroit plus grande que la force centriſuge $O\,B$, & réciproquement. Dans le cas de l'égalité des deux forces, le corps décriroit un cercle : & en effet, nous avons démontré que dans ce cas $O\,B = A\,e$. Telle eſt la maniere de concevoir le mouvement curviligne d'un corps autour d'un point fixe F, centre de peſanteur d'un corps A, qui exclut toute idée de poligone d'une infinité de côtés, & toute idée de parallélogramme $A\,e\,B\,o$. L'on doit donc entendre qu'un corps A, peſant à tout inſtant ſur ſon centre F, de gravité, décrira néceſſairement une ligne courbe, lorſqu'il viendra à être frappé par une force ABM, à cauſe qu'il ſera mû entre deux forces, dont les directions OB, $o\,d$, ſeroient en ſens contraire, & qui ſeroient encore en rapport fini entr'elles. Le corps alors, pour obéir à l'action contraire de ces deux forces, qui agiront ſans interruption ſur lui, ſera néceſſité de quitter à tout inſtant la direction de la tangente ABM, qu'il tendoit à parcourir, ou, ce qui revient au même, le mouvement rectiligne & tangentiel ABM, ſera, par l'effet de ces deux forces, transformé en mouvement curviligne $A\,o\,N$, préciſément comme il arriveroit, ſi le corps

corps *A*, étoit lié à un fil *AF*, fixement attaché au point *F*, & qu'une main en *A*, tînt toujours le fil tendu. Le corps & la main dans cet état, étant frappés dans la direction de la tangente *ABM*, l'on voit évidemment qu'ils décriroient néceſſairement une courbe, autour du point *F*, centre de mouvement du corps. On peut concevoir que la main ſeroit toujours à la même diſtance du centre *F*, & alors le corps décriroit un cercle; ou qu'elle gliſſeroit ſur le fil, ou rayon *AF*, ſoit en s'éloignant, ou en ſe rapprochant du centre *F*, en tenant toujours le fil tendu; & dans ces cas, la courbe décrite ne ſeroit point un cercle, mais la courbe couperoit toujours l'axe *AFP*, dans quelque point, *P*, plus près ou plus loin du centre de mouvement *F*: ce qui démontre encore de nouveau que cette même courbe ne pourroit être ni une parabole, ni une hyperbole, ni aucune eſpece de courbes, non rentrantes en elles-mêmes, puiſque le mouvement angulaire du corps le rameneroit toujours vers l'axe *AFP*, de la courbe, ſoit que le rayon vecteur *AF*, allât en croiſſant en tems égal, ou en décroiſſant.

De cette génération exacte du mou-

ment curviligne, ſuivent pluſieurs conſéquences; ſavoir, que toutes les propoſitions ſur les forces centrales, déduites de l'hypothèſe de courbes poligones, ſuppoſées décrites par un corps de dimenſions finies, ſont abſolument fauſſes, & ſpécialement celle-ci, qu'on trouve dans la plupart des ouvrages qui traitent de ces forces; ſavoir, *que ſi un corps eſt mû le long d'une courbe, le changement de direction qu'il eſt obligé de faire à chaque côté infiniment petit de la courbe ne lui fait perdre de ſa viteſſe qu'une quantité infiniment petite du ſecond ordre* (a).

La démonſtration qu'on donne de cette propoſition eſt appuyée ſur deux hypothèſes fauſſes. La premiere, ſur l'idée peu exacte en cette occaſion, de la génération d'une courbe, conſidérée, non point comme courbe rigoureuſe, mais comme poligone d'une infinité de côtés; & la ſeconde, ſur la ſuppoſition abſurde qu'une force centrale Ae, infiniment petite, à l'égard d'une force de projection finie AB, peut modifier à tout inſtant cette derniere force, & retirer le mobile de la direction de la tangente AB.

(a) Leçons élémentaires de Méchanique, par M. l'Abbé de la Caille, de l'Académie Royale des Sciences, *p.* 137.

Mais il réſulte de la maniere exacte, dont nous avons expliqué le mouvement d'un corps, autour d'un point fixe, que les forces centripète & centrifuge od, oB, ſont en oppoſition, & en rapport fini entr'elles. D'où il ſuit qu'à la fin de chaque inſtant infiniment petit t, la force de la gravité od, a toujours détruit une ſomme de forces centrifuges OB, qui auroient concouru à la génération de l'arc Ao; mais l'arc Ao, étant infiniment petit du premier ordre, les petites lignes od, OB, ſeront des infinimens petits du ſecond ordre. Donc la force centrale, à la fin de la génération d'un arc infiniment petit Ao, aura détruit une ſomme infinie de petites quantités oB, du ſecond ordre : par conſéquent, la ſomme infinie des petites quantités détruites oB, ſera du même ordre que l'arc Ao, décrit, à la fin du tems t; c'eſt-à-dire, que la ſomme des forces centrifuges détruites, dans un tems t, infiniment petit, ſera une quantité infiniment petite du premier ordre, & par conſéquent, dans un tems T, fini, la ſomme des forces centrifuges détruites, ſera une quantité finie.

Delà il ſuit qu'à la fin d'un tems T, fini, plus ou moins long, la force de la gravi-

té aura totalement détruit la force de projection *ABM*, & que par conſéquent, le corps parviendra au centre *F*, de peſanteur. Donc la courbe décrite, par tout corps qui circuleroit autour de ſon centre *F*, de peſanteur, ſans être ſoutenu que par ſa force centrifuge, à ſuppoſer même qu'elle eût toute la longueur dont elle pourroit être ſuſceptible, ne ſeroit jamais qu'une ſpirale qui rameneroit le mobile à ſon centre de mouvement & de peſanteur.

Par conſéquent tout ce qui a été écrit juſqu'ici ſur les loix des forces centrales, & ſur les courbes ſuppoſées décrites par des corps de dimenſions finies, autour de leur centre de peſanteur, eſt faux & erroné ; puiſque la ſeule courbe que ces corps peuvent décrire, quand ils ne ſeront ſoutenus au-deſſus de leur centre de tendance que par leur force centrifuge, eſt néceſſairement une ſpirale, & non point un cercle, ni une ellipſe, ni encore moins une parabole, une hyperbole... &c. comme on l'a dit.

Si un corps *A* (*fig.* 28), peſant à tout inſtant ſur ſon centre *F*, de tendance, eſt abandonné à lui-même, & à l'action de ſa ſeule gravité ; il eſt clair qu'il parviendra au centre

par la ligne droite *AF*; dans le cas où ce corps recevroit un mouvement tangentiel *ABM*, qui ſe compliqueroit avec l'action de la gravité, il n'arrivera plus au centre par une droite *AF*, mais par une ligne courbe *ACF*: car il eſt évident que le mouvement tangentiel *ABM*, ne peut produire d'autre effet ſur le corps *A*, que celui de le ramener au même point *F*, où il tendroit toujours par une autre route ſeulement que celle qu'il auroit tenue, ſi ce mouvement ne lui avoit pas été appliqué. Donc la courbe décrite par ce corps, ne pourroit être qu'une ſpirale.

L'action tangentielle doit toujours opérer deux effets ſur le corps; le premier, de le ſoutenir au-deſſus du centre de peſanteur, par un effort *oB*, égal & oppoſé à celui de la gravité *od* (*fig.* 29); & le ſecond, de lui communiquer un mouvement de tranſlation. Or le premier de ces effets ne peut être produit qu'aux dépens du ſecond; comme on voit qu'il arrive à un homme qui porte un fardeau, dont le mouvement de tranſlation diminue toujours, à proportion qu'il le porte plus long tems, ou plus loin. L'action tangentielle peut donc être conſidérée comme une force qui porteroit un poids, autour du

centre de peſanteur du corps, & qui par conſéquent doit diminuer, & finir même par s'anéantir, lorſque le poids porté auroit parcouru un certain eſpace. Il eſt évident que cet eſpace ſeroit d'autant plus long que le poids du corps ſeroit ſuppoſé moindre, relativement à la force tangentielle; & qu'afin que l'eſpace parcouru pût être infini, il faudroit que le poids du corps fût infiniment petit. Mais comme le poids des corps de dimenſions finies, eſt fini de ſa nature; il s'enſuit que l'action tangentielle, qui eſt également finie, portant un poids fini, autour du centre de peſanteur, ne peut qu'en être affoiblie à tout inſtant, & finir même par être totalement anéantie. Donc un corps de dimenſions finies ne pourroit jamais décrire, autour de ſon centre de peſanteur, qu'une courbe, ſur laquelle le mouvement du corps ſeroit anéanti; & ce mouvement devant ſe terminer au centre de tendance, il eſt manifeſte que la courbe décrite ne pourroit être qu'une ſpirale.

On peut même déterminer l'époque à laquelle la force de la gravité auroit détruit le mouvement de projection du corps; puiſque cette époque eſt celle où les deux forces, faiſant parcourir au même corps,

le même eſpace, dans le même tems, ſeroient égales ; car conſidérant l'action tangentielle, comme une force centrifuge, diamétralement oppoſée à l'action de la gravité, il eſt clair que celle-ci doit détruire celle-là, au moment où elle lui ſera égale, & qu'elle feroit décrire au même corps, un eſpace égal, dans le même tems ; puiſque les deux forces étant égales, & en ſens contraire, ſe détruiroient reſpectivement. Cela ſuppoſé :

Qu'un corps A (*fig.* 30), tendant à décrire un cercle $AENBA$, autour de ſon centre C, de peſanteur, ſoit ſuppoſé devoir décrire un arc AN, égal au diamètre AB, de ce cercle. Je dis qu'alors les deux forces ſeront égales, & qu'étant en ſens contraire, la force de la gravité doit détruire la force de projection AD, du corps. En effet, nous avons vu qu'en nommant c, l'arc décrit par le corps ; r, le rayon du cercle, l'expreſſion générale de la force accélératrice du corps, ou l'eſpace qu'elle lui feroit parcourir, dans le tems employé à décrire l'arc c, étoit toujours, & dans tous les cas : $\frac{c^2}{2r}$.

Mais l'arc AN, n'eſt jamais que la tangente AD, qui, par l'effet de la gravité,

ſe ſeroit courbée pour prendre la forme circulaire AN. L'on aura donc $AD = AN = c = 2r$; par conſéquent, ſubſtituant $2r$ à c, dans l'expreſſion générale $\frac{c^2}{2r}$, de l'eſpace que la force accélératrice feroit parcourir au corps, l'on aura, pour valeur de l'eſpace parcouru, dans le cas préſent, $\frac{c^2}{2r} = \frac{4rr}{2r} = 2r = AB = AN = AD$; c'eſt-à-dire, que, dans ce cas, l'eſpace AD, que feroit parcourir au corps A, l'action tangentielle, ſeroit égal à l'eſpace AB, que la force accélératrice lui feroit décrire dans le même tems. Ces deux forces, réduites au mouvement uniforme, ſeroient donc égales, puiſqu'elles feroient parcourir le même eſpace AD, ou AB, au même corps, dans le même tems; & étant en ſens contraire, l'une centrifuge, & l'autre centripète; il eſt évident qu'elles ſe détruiroient. Donc la force de la gravité détruiroit toute la force de projection d'un corps, qui tendroit à décrire un cercle, au moment où ce corps ſeroit ſuppoſé décrire un arc AN, égal au diamètre AB, du cercle à décrire, puiſqu'à cette époque les forces contraires ſeroient égales. Il eſt donc de la derniere abſurdité de prétendre qu'un corps de dimenſions finies non

ſoutenu, puiſſe décrire un cercle, ou une ellipſe, une parabole, une hyperbole... &c. autour de ſon centre de peſanteur; car il s'enſuivroit delà que le mouvement du corps, par ces courbes, ſeroit infini; tandis que tout démontre qu'il ſe termineroit au centre de tendance, & même dans le cas des courbes fermées, qui ſont les ſeules qu'il pourroit décrire, avant que d'avoir achevé ſa premiere demi-révolution *ANB*.

Il n'y a donc point d'autre maniere de concevoir le mouvement des corps du ſyſtême ſolaire, que de les ſuppoſer rouler, ou gliſſer ſur des orbites phyſiques, de forme elliptique, à la maniere qu'il a été expliqué.

Il ſeroit aſſurément difficile de réfuter plus complétement les principes prétendus Mathématiques de M. Newton, ſur les loix des forces centrales, qu'on l'a fait dans le cours de cet Ouvrage; mais pour qu'on puiſſe mieux ſaiſir le véritable état de la queſtion, dans ces objets controverſés; l'on croit devoir encore expoſer l'enſemble de la méthode Newtonienne dans la détermination des loix attribuées à ces forces. Nous la tirerons de l'Hiſtoire des Mathématiques de M.

Montucla (*a*), où elle eſt clairement décrite, d'après M. Newton; ce qui donnera lieu à quelques obſervations très-propres à confirmer la vérité des principes précédemment établis. On y part d'abord, comme M. Newton, de l'hypothèſe que toute eſpece de courbes, fermées ou non fermées, peuvent être décrites autour d'un ſeul & même point fixe, par l'effet du mouvement angulaire d'un rayon vecteur, conſtant, ou variable, à l'extrémité duquel le corps eſt toujours ſuppoſé mû. On établit enſuite, toujours d'après M. Newton, & d'après cette hypothèſe; 1°, Qu'en toute eſpece de courbes, les aires décrites par le rayon vecteur, ſont proportionnelles aux tems employés à les décrire; 2°, Que la vîteſſe d'un corps qui décrit une courbe, eſt à chaque point, en raiſon réciproque de la perpendiculaire tirée du centre des forces ſur la tangente à ce point; 3°, Qu'en toute courbe la partie du rayon vecteur, prolongé juſqu'à la rencontre de la tangente élémentaire, compriſe entre la courbe & la tangente, eſt l'effet de la force centrale, & que c'étoit *du rapport & de la meſure de ce petit eſpace dans les différens points de la*

(*a*) II. Vol. *pag.* 410 & ſuivantes.

courbe que dépendoit la meſure de la force centrale dans ces différens points ; 4°, Que nommant e, ce petit eſpace ; s, l'aire ou ſecteur curviligne décrit dans le même tems par le rayon vecteur, l'intenſité de la force centrale, dans les différens points de la courbe, étoit toujours proportionnel à $\frac{e}{s^2}$, c'eſt-à-dire, à l'eſpace e, parcouru, diviſé par le quarré t^2, du tems, ou du ſecteur curviligne s^2, qui lui étoit proportionnel : de maniere que $\frac{e}{s^2}$, étoit l'expreſſion générale de l'intenſité de la force centrale d'un corps qui décriroit une courbe quelconque autour d'un point, d'après M. Newton lui-même, dont M. Montucla expoſe les principes & les procédés.

En déterminant enſuite, dans chaque courbe en particulier, les grandeurs e, s, propres à ces courbes ; l'on détermine la loi de la force centrale $\frac{e}{s^2}$ qui leur convient, & c'eſt par-là que M. Newton, & tous ſes Diſciples après lui, ont trouvé, par cette formule, *qu'on peut varier de manieres différentes ; en y faiſant entrer le rayon de la développée*, que dans les trois ſections coniques ; dont il s'agit prin-

cipalement dans cet Ouvrage, la loi de la force centrale étoit, à chaque point de ces courbes, ſuppoſées décrites par leur foyer, en raiſon inverſe du quarré du rayon vecteur r, ou de la diſtance, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{r^2}$.

5°, On y rappelle enſuite le théorême de M. Huighens, ſur la vîteſſe avec laquelle le corps décriroit le cercle, qui eſt toujours égale à celle que le corps auroit acquiſe, après être tombé de la hauteur du demi-rayon du cercle décrit; & l'on ajoute que dans le cas où cette vîteſſe ſeroit moindre, ou plus grande, la courbe décrite ſera une ellipſe décrite par le foyer le plus éloigné du corps, dans le premier cas, & par le foyer le plus voiſin dans le ſecond. Que ſi cette vîteſſe eſt préciſément égale à celle que le corps auroit acquiſe, après être tombé de la hauteur du rayon entier, la courbe que le corps parcourra ſera une parabole, dont le foyer ſeroit placé à l'extrémité de ce même rayon, & dans le cas enfin où cette hauteur ſeroit plus grande que celle du rayon, le corps *décrira une*

(a) Ibid. *pag.* 414, 415, 416.

hyperbole d'autant plus évaſée que la hauteur ſeroit plus grande.

Telles ſont en ſubſtance les loix prétendues géométriques de M. Newton, ſur les forces centrales des corps, mûs d'un mouvement angulaire autour de leur centre de peſanteur, *qu'on ne peut révoquer en doute*, ſuivant le langage des plus célèbres Géomètres Newtoniens, *ſans ſe rendre coupable, aux yeux des perſonnes intelligentes dans la Géométrie & la Méchanique, d'une honteuſe précipitation pour ne rien dire de plus* (a).

Mais nous le demandons à M. Montucla lui-même : qu'il nous diſe qui eſt plus *coupable de la honteuſe précipitation*, dont il parle, ou de ceux qui prennent de ſimples hypothèſes pour *des vérités inconteſtables*, ou de ceux qui attaquent ces hypothèſes en elles-mêmes, & qui démontrent qu'on ne ſauroit les admettre ? De tout ce que nous venons d'extraire de l'ouvrage de M. Montucla, qui n'eſt que l'écho de M. Newton, dans cette partie de ſon ouvrage, d'ailleurs très-eſtimable, réſulte-t-il autre choſe que de ſimples hypothèſes, ſur leſquelles tous ſes raiſonnemens, & tous ſes calculs ſont

(a) Ibid. *pag.* 418.

fondés? La formule générale $\frac{e}{s^2}$, de la force centrale, porte-t-elle ſur d'autres fondemens que ſur ces deux hypothèſes; ſavoir, 1°, Que toute eſpece de courbes fermées ou non fermées, pourra toujours être décrite autour d'un point, à la maniere des courbes fermées & révolutives, par le mouvement angulaire d'un rayon vecteur, conſtant, ou variable; & en conſéquence, que dans toute eſpece de courbes, le petit eſpace e, pourra toujours être conſidéré comme l'effet de la force centrale, pendant le tems employé par le rayon vecteur à décrire l'aire, ou ſecteur curviligne s; 2°, Que ce même ſecteur s, pourra toujours être ſubſtitué au petit tems t, durant lequel il ſeroit décrit, par-là même qu'il lui eſt proportionnel; ce qui eſt une ſeconde hypothèſe qui peut même n'être pas vraie dans tous les cas, comme nous le verrons bientôt. Mais ſuppoſons, pour un inſtant, que le mouvement angulaire ne doive point entrer dans la génération d'une courbe non rentrante en elle-même, comme nous l'avons ſi ſouvent démontré, nous demandons encore à M. Montucla ce que devient la formule $\frac{e}{s^2}$ de la force centrale,

dans le cas de la deſcription d'une courbe de cette eſpece ? Il y a donc bien plus de précipitation à prendre ces hypothèſes pour *des vérités démontrées*, qu'à les examiner en elles-mêmes, à l'effet de les admettre avec lumiere, & avec elles toutes les conſéquences qui en réſultent, dans le cas où on les trouveroit fondées, ou à les rejetter, comme nous faiſons, ſi on les trouve au contraire erronées, & déſavouées par une ſaine & exacte Géométrie.

Si nous examinons à préſent les réſultats que donne la formule générale $\frac{e}{f^2}$, de la force centrale, appliquée aux ſections coniques qui ſeroient ſuppoſées décrites par leur foyer ; il ne ſera pas difficile d'appercevoir combien cette formule eſt erronée, par le paralogiſme intolérable auquel elle conduit, & dont il eſt bien étonnant qu'aucun des Géomètres d'un ſi grand nom qui l'ont perpétuellement ſous leurs yeux, ne ſe ſoit apperçu. Ce paralogiſme eſt que dans deux points quelconques de la ſection décrite, les tems ſeroient en raiſon des rayons vecteurs ; c'eſt-à-dire, que les rayons vecteurs ſeroient toujours proportionnels aux

tems ; ce qui eſt de toute fauſſeté ; puiſqu'il s'en faut de beaucoup que les rayons vecteurs croiſſent ou décroiſſent comme les tems. Dans un tems, par exemple, double, ou ſous-double, triple, ou ſous-triple.... &c. les rayons vecteurs ne peuvent viſiblement ni croître, ni décroître dans ce rapport des tems. Et c'eſt néanmoins là le réſultat de la formule générale $\frac{e}{s^2}$, où $\frac{e}{t^2}$, en ſubſtituant le tems à l'aire ou ſecteur curviligne s, qui lui eſt proportionnel. Et en effet, cette formule, dans les trois ſections coniques, finit par ſe transformer en $\frac{1}{r^2}$, puiſqu'on en conclut que la loi de la force centrale eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au foyer ; c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe du quarré du rayon vecteur r : mais en ramenant la formule générale $\frac{e}{t^2}$, à l'expreſſion $\frac{1}{r^2}$; il eſt évident que l'opération ſe termine à ſubſtituer l'unité à l'eſpace e, parcouru, & le quarré r^2, de la diſtance, ou du rayon vecteur, au quarré t^2, du tems ; ſubſtitution qui transforme la formule générale $\frac{e}{t^2}$, en l'expreſſion $\frac{1}{r^2}$. La ſubſtitution de l'unité à l'eſpace e, parcouru

couru ne contient rien de repréhenſible ; puiſqu'on peut toujours ſuppoſer qu'un premier eſpace e, décrit, dans un très-petit tems t, ſeroit égal à l'unité ; mais en ſubſtituant le quarré r^2, de la diſtance, au quarré t^2, du tems, on ſuppoſe alors que le tems t, durant lequel l'eſpace e, ſeroit décrit, ſeroit proportionnel à la diſtance r ; ſans quoi l'on n'auroit pas droit de ſubſtituer r^2 à t^2 ; & dès-là la formule générale $\frac{e}{t^2}$ de la force centrale eſt démontrée fauſſe & abſurde, puiſqu'elle conduit au paralogiſme inexcuſable de rendre proportionnels le tems employé à décrire un eſpace e, & la diſtance r, au centre des forces. Cet argument eſt ſimple, clair, & ſans replique, puiſqu'il réſulte de la converſion de la formule générale $\frac{e}{t^2}$ de la force, en l'expreſſion $\frac{1}{r^2}$ de ſon rapport, exprimé par le rayon vecteur, ou par la diſtance r, au centre de tendance du corps.

Il eſt d'ailleurs évident que l'hypothèſe générale de M. Newton, d'une force centrale, variable en raiſon de quelque fonction des diſtances, ne pouvoit aboutir qu'à ce

paralogiſme, puiſque deux meſures différentes étoient, par cette hypothèſe, données à la même force; ſavoir : $\frac{1}{t^2}$, & $\frac{1}{r^2}$. En nommant 1, le premier eſpace e, parcouru dans un tems t, il eſt clair que l'intenſité de la force centrale, qui eſt toujours une force accélératrice conſtante, pendant le cours d'un tems infiniment court $\dot{t}$, eſt en raiſon de $\frac{1}{t^2}$; & comme, par l'hypothèſe même de M. Newton, la meſure de cette force, eſt encore en général en raiſon de quelque fonction de la diſtance, & dans les ſections coniques en particulier, en raiſon de $\frac{1}{r^2}$; dès-là le paralogiſme de la proportionnalité entre le tems t, employé à décrire un eſpace 1, & la diſtance r, du corps au centre de tendance; puiſqu'en effet cette force étant p, l'on aura : $p = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{r^2}$; d'où $t = r$. On peut prouver ce paralogiſme d'une autre maniere : que s, S, expriment deux aires ou ſecteurs curvilignes, décrites en tems inégal t, T, dans une même ſection conique; l'on aura, par la loi de la proportionnalité des aires

aux tems, cette analogie : $t : T :: s : S$, d'où : $t^2 : T^2 :: s^2 : S^2$. Nommons actuellement p, P, la force centrale du corps, aux deux points quelconques de la courbe où il décriroit les aires, ou ſecteurs s, S, l'on aura encore cette analogie : $\frac{e}{t^2} : \frac{E}{T^2} :: p : P$; puiſque l'intenſité de la force eſt toujours en raiſon compoſée de la directe de l'eſpace parcouru, & de l'inverſe du quarré du tems employé à le parcourir. Mais puiſque le réſultat de la formule générale $\frac{e}{t^2}$, donne, dans le cas ſuppoſé des trois ſections coniques, l'analogie : $p : P :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$; l'on aura encore cette autre analogie : $\frac{e}{t^2} : \frac{E}{T^2} :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$. Si l'on ſuppoſe actuellement que les eſpaces e, E, décrits en tems inégaux t, T, ſoient égaux, ce qui eſt toujours poſſible, dans ce cas, l'on aura encore : $\frac{1}{t^2} : \frac{1}{T^2} :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$; d'où réſulteroit l'analogie $t : T :: r : R$; c'eſt-à-dire, que les tems ſeroient proportionnels aux rayons vecteurs, ce qui ne peut être. Donc il eſt faux que la force centrale, qui feroit même décrire par ſuppoſition l'une des trois

ſections coniques, pût jamais être dans ces courbes en raiſon doublée, & inverſe des rayons vecteurs. Où ſont donc *ces vérités démontrées, ces propoſitions inconteſtables qu'on ne peut révoquer en doute ſans ſe rendre coupable d'une honteuſe précipitation?* Il eſt aſſez ſingulier de voir réduire toutes ces déclamations, ces prétendues vérités, en pur charlataniſme, ſous lequel on maſque des erreurs notables.

Si nous cherchons encore à vérifier par une courbe telle que le cercle, qui pourroit véritablement être décrite d'un mouvement angulaire autour d'un point, dans les cas, & dans les ſuppoſitions dont il a été parlé, la légitimité de la ſubſtitution que l'on fait de l'aire, ou ſecteur curviligne S, au tems t, employé à la décrire, on trouvera encore les procédés Newtoniens en défaut de ce côté; car il s'enſuivroit que la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre, ſeroit, par la formule générale, $\frac{e}{f^2}$, en raiſon inverſe du double du cube du rayon de ce même cercle. En effet, quand le corps décrit un cercle, l'eſpace e, que la force centrale lui feroit décrire dans un

tems $\dot{t}$, infiniment petit, eſt toujours égal au quarré de l'arc C, décrit, diviſé par le diamètre $2r$, de ce cercle : l'on aura donc $e = \frac{c^2}{2r}$; mais l'aire, ou ſecteur curviligne S, eſt, dans ce cas, égale à $\frac{cr}{2}$; l'on aura donc $S = \frac{cr}{2}$, & par conſéquent, $S^2 = \frac{c^2r^2}{4}$; donc $\frac{e}{\dot{t}^2} = \left.\frac{\frac{c^2}{2r}}{\frac{c^2r^2}{4}}\right\} = \frac{4c^2}{2c^2r^3} = \frac{2}{r^3}$.

Il ſuivroit donc de cette formule que l'intenſité de la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle ſeroit en raiſon du double du cube du rayon, pris inverſement ; ce qui eſt certainement faux. Mais ſi à la place du ſecteur circulaire $\frac{cr}{2}$, nous prenons tout ſimplement l'arc décrit C, qui eſt auſſi proportionnel au tems $\dot{t}$, employé à le décrire ; la formule générale ne ſera plus $\frac{e}{\dot{t}^2}$, mais $\frac{e}{\dot{t}^2}$, parce que nous n'aurons plus de ſecteur circulaire $\frac{cr}{2}$, à ſubſtituer au ſecteur général S, mais l'arc C, à ſubſtituer au tems $\dot{t}$. L'on aura donc, par cette ſubſtitution, $\frac{e}{\dot{t}^2} = \frac{c^2}{2rc^2} = \frac{1}{2r}$,

c'eſt-à-dire, qu'alors la force centrale ſera, dans le cercle, en raiſon inverſe du diamètre de ce même cercle, ce qui eſt une loi bien différente de celle qui réſulteroit de la formule générale $\frac{e}{r^2}$, ſubſtituée très-mal à propos à la formule légitime $\frac{e}{r^2}$. Cette ſubſtitution eſt donc erronée; l'eſpace parcouru, en vertu de la force centrale, étant toujours un produit de la vîteſſe acquiſe, à la fin d'un tems, par la moitié de ce tems, s'exprime par une aire triangulaire, à cauſe que la vîteſſe acquiſe, & le tems s'expriment par une ligne. Ainſi l'eſpace décrit doit toujours être d'une dimenſion au-deſſus de la ligne, repréſentant le tems, ou la vîteſſe; puiſqu'il eſt lui-même un produit du tems par la vîteſſe. Or en exprimant le tems par l'aire, ou ſecteur curviligne S, d'une courbe, comme on le pratique dans les principes Newtoniens, il en arrive qu'on éleve le tems, qui devroit être repréſenté par une ligne droite, ou courbe, à la même dimenſion que l'eſpace parcouru, ou le produit du tems par la vîteſſe, ce qui ne peut que donner des réſultats faux, & conduire à l'abſurde; tant il eſt vrai que nos Géomètres Newtoniens entendent peu la

matiere des forces centrales, ſur laquelle néanmoins ils ſe croyent les premiers hommes du monde; mais pourſuivons.

Nous avons nous-mêmes établi, dans la ſeptième Obſervation, dans quel cas les forces accélératrices étoient entr'elles en raiſon inverſe du quarré des diſtances. Cette loi a lieu à l'égard de deux corps qui décriroient différens cercles, autour d'un même centre de peſanteur, mais non point à l'égard d'un même corps décrivant une ſeule & même courbe, autour d'un même centre, telle, par exemple, que l'une des ſections coniques; car pour que la force centrale pût, dans ce cas, être dans ce rapport; il faudroit que dans tous les inſtans le corps tendît à décrire un cercle; que par conſéquent, la direction de la force de projection fût toujours perpendiculaire ſur le rayon vecteur, dans le même tems que ce rayon varieroit ſoit par accroiſſement, ſoit par décroiſſement: dès-lors le mobile, ſuivant la loi de différens corps qui décriroient différens cercles autour d'un même centre, puiſqu'il tendroit à tout inſtant à décrire la même courbe à différentes diſtances de ce centre, comme ces corps, auroit, dans tous les points de la courbe décrite, une force

centrale qui étant meſurée par des eſpaces décrits d'un mouvement uniformément accéléré, ſeroit en raiſon doublée & inverſe de la diſtance au centre de tendance. Voilà dans quel cas le corps, ſuppoſé mû ſur la circonférence d'une ſection conique, auroit une force centrale en raiſon inverſe & doublée de la diſtance au centre des forces; mais comme ce cas eſt impoſſible, puiſqu'il ſuppoſe que l'angle formé par la direction du mouvement tangentiel, & le rayon vecteur ſeroit conſtant, & toujours égal à l'angle de 90 degrés, dans le même tems que ce rayon varieroit, ſoit par accroiſſement, ſoit par décroiſſement, ce qui eſt impoſſible; il s'enſuit que quand même il ſeroit poſſible que le corps pût circuler dans une courbe telle que l'une des trois ſections coniques, priſes indifféremment, ſa force centrale ne pourroit jamais être en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au centre des forces: enſorte que cette loi ſi célebre d'une force centrale, en raiſon inverſe & doublée de la diſtance, dont les Newtoniens étourdiſſent le monde depuis ſi long-tems, qu'on ne *peut même revoquer en doute, ſans ſe rendre coupable d'une honteuſe précipitation, pour ne rien*

dire de plus, n'eſt, même conſidérée en ſoi, & en ſuppoſant poſſibles des mouvemens qui ſont impoſſibles, qu'une véritable abſurdité.

La méthode Newtonienne n'eſt pas plus exacte lorſqu'elle détermine les vîteſſes avec leſquelles le mobile décriroit la parabole, & l'hyperbole. Il s'agit ici d'aſſigner avec préciſion la hauteur dont le mobile devroit tomber, par le ſeul effet de ſa gravité, pour acquérir, à la fin de ſa chûte, une vîteſſe propre à lui faire décrire un cercle, une ellipſe, une parabole, une hyperbole. La vîteſſe acquiſe, à la fin de ſa chûte par la demi-diſtance, ou le demi-rayon, eſt celle avec laquelle le corps décriroit le cercle, ſuivant un théorême de M. Huighens, que nous avons démontré d'une maniere très-ſimple & très-élémentaire. Si la hauteur eſt moindre, ou plus grande que le demi-rayon, la vîteſſe acquiſe, à la fin de la chûte, ſera moindre, ou plus grande que celle avec laquelle le mobile décriroit le cercle, & dès-lors la courbe décrite, ſuivant M. Montucla lui-même (*a*), ſera une ellipſe, ce que nous lui accordons très-volontiers. Le foyer, centre des forces,

(*a*) Ibid. *pag.* 415 & 416.

ſera celui qui ſeroit plus éloigné du point du départ, dans le cas où la vîteſſe du corps ſeroit moindre que celle du cercle; & le plus voiſin, dans le cas où cette vîteſſe ſurpaſſeroit celle du cercle, ce que nous lui accordons encore. Mais, voici ce que nous n'accordons pas à M. Montuclà; ſavoir, que dans le cas où la hauteur dont le corps tomberoit, ſeroit plus grande que le demi-rayon, cette hauteur dans le cas de l'ellipſe ne pourra toutefois s'étendre juſqu'à égaler le rayon entier, ni encore moins le ſurpaſſer. M. Montucla qui vouloit ménager le cas de la parabole, & de l'hyperbole, a reſtreint arbitrairement ceux de l'ellipſe à des chûtes moindres que de la hauteur du rayon; car, dit-il, *ſi l'on ſuppoſe la hauteur de la chûte, préciſément égale au rayon, le corps décrira une parabole; & une hyperbole, ſi cette hauteur étoit plus grande.*

Sur quoi nous obſervons d'abord qu'il réſulteroit de ce ſyſtême qu'un même corps pourroit décrire, autour d'un même centre, une infinité d'ellipſes différentes, en ſuppoſant différentes vîteſſes acquiſes à la fin des chûtes moindres que le rayon: une ſeule parabole, & une infinité d'hyperboles. Cette parabole unique placée en

tre l'infinité d'ellipſes, & l'infinité d'hyperboles, eſt ſur-tout bien remarquable, & figure ici aſſez plaiſamment. Il ne falloit pas moins que les Téleſcopes Newtoniens, pour avoir ainſi diſtingué une ſeule courbe abîmée entre deux nombres infinis d'autres courbes. Il eſt encore remarquable que le paſſage d'une courbe à l'autre ſe fait ici très-bruſquement, & ſans gradation, c'eſt la plus légère différence dans la hauteur des chûtes qui va transformer l'ellipſe en parabole, & la parabole en hyperbole ; car la hauteur de la chûte étant ſuppoſée moindre ſeulement de quelques toiſes, pieds ou pouces.... &c. que le rayon ; la courbe ſera toujours rentrante, puiſque ce ſeroit toujours une ellipſe. En ajoutant ce peu d'eſpace à cette hauteur : voilà la courbe qui change bruſquement de nature, qui n'eſt plus rentrante, qui s'écarte tout d'un coup à l'infini de ſon axe, & dont le corps qui la parcourt remonte à l'infini au-deſſus de ſon centre de peſanteur. Il eſt évident que la meilleure réfutation que l'on puiſſe faire de ce ſyſtême, c'eſt ſa ſimple expoſition ; car certainement c'eſt le réfuter que de l'expoſer tel qu'il eſt.

Mais Meſſieurs les Newtoniens ont-ils

donc oublié la Géometrie, lorſqu'ils ſe livrent à de pareilles idées? Ont-ils oublié, par exemple, que l'équation à l'ellipſe dont le paramètre ſeroit p, & l'axe principal $2a$, étant $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, pour la transformer en parabole, il falloit néceſſairement faire diſparoître de cette équation le ſecond terme $\frac{px^2}{2a}$, ce qui ne ſe pouvoit qu'autant que ce terme deviendroit nul à l'égard du premier terme px, & par conſéquent qu'autant que le centre ou foyer de tendance s'éloignant à l'infini, l'axe $2a$, deviendroit infini. Voilà comment le mouvement elliptique peut ſe transformer en mouvement parabolique, & non point en ajoutant quelques toiſes, pieds ou pouces à la hauteur dont on auroit ſuppoſé le corps tombé, ce qui ne ſeroit pas capable de changer la nature de la courbe décrite, ni de transformer aſſurément une courbe rentrante en elle-même, en une courbe non rentrante; c'eſt-à-dire, une courbe finie en une courbe infinie. Il eſt évident que le même raiſonnement s'applique au mouvement hyperbolique : quelques toiſes, pieds, ou pouces de plus, ou de moins, & même en général nul eſpace fini, plus grand, ou

plus petit, ajouté à la hauteur dont on ſuppoſeroit le corps tombé, ou retranché de cette même hauteur, ne pourroit jamais produire l'énorme différence qu'il y aura toujours entre une courbe rentrante qui n'éloigne jamais le corps circulant de ſon centre de mouvement que d'une quantité finie, & une courbe non rentrante, dont la nature ſeroit de le faire remonter à l'infini au-deſſus de ce même centre; ce qui ne pourroit s'exécuter que par l'effet d'une force de projection infinie, ainſi qu'il a été prouvé ſi ſouvent. Meſſieurs les Newtoniens n'ont donc pas bonne grace de crier à l'héréſie, lorſqu'on touche à leurs principes.

J'obſerverai néanmoins qu'il y a quelque choſe de vrai dans la propoſition de M. Montucla, & qui a pu cauſer ſa mépriſe; ſavoir, qu'en effet la vîteſſe avec laquelle un corps parcourroit la parabole, eſt toujours égale à celle qu'il auroit acquiſe, s'il étoit tombé de la hauteur du ſommet de la parabole au foyer; mais les tendances du corps ſont alors parallèles, (ce que M. Montucla auroit dû obſerver) & ne peuvent être ſuppoſées coïncider tout au plus que vers un centre ou foyer infiniment diſtant. Cette propoſition eſt

encore ſuſceptible d'une démonſtration rigoureuſe.

Soit, en effet, la courbe $AONP$, (*Fig.* 31) ſuppoſée décrite par un corps, avec une vîteſſe de projection AS, imprimée, égale à celle qu'il auroit acquiſe, s'il étoit tombé d'une hauteur, par exemple, AF: je dis que cette courbe ſera une parabole, dont F, ſera le foyer, dans le cas toutefois où les tendances du corps ſeroient parallèles, ou, ce qui revient au même, dans le cas où le centre de peſanteur ſeroit infiniment éloigné du corps A. Quelle que ſoit la vîteſſe de projection imprimée au corps A, il eſt manifeſte qu'il ne pourroit jamais décrire qu'une parabole; puiſque, dans deux points quelconque de la courbe, l'on auroit toujours cette analogie : $t^2 : T^2 :: e : E$, c'eſt-à-dire, les quarrés des tems proportionnels aux eſpaces parcourus. Mais le corps, par l'hypothèſe, étant mû avec la vîteſſe acquiſe, à la fin de ſa chûte, AF, parcourroit dans le même tems T, uniformément un eſpace $AM = FN$ double de AF; & dans un tems moindre, par exemple, t, un eſpace $AT = BO$: l'on auroit donc $T^2 : t^2 :: \overline{FN}^2 : \overline{BO}^2 :: E = AF$:

$\frac{AF \times \overline{BO}^2}{\overline{FN}^2} = AB$, c'eſt-à-dire, $\overline{FN}^2 : \overline{BO}^2 :: AF : AB$, ce qui eſt préciſément l'analogie de la parabole.

Ainſi un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire une parabole, dans l'hypothèſe des tendances parallèles, ſera toujours mû avec une vîteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe s'il étoit tombé de la hauteur AF, du ſommet de la parabole au foyer F; & il parcourroit avec cette vîteſſe uniformément un eſpace AM, double de AF; c'eſt-à-dire, un eſpace égal au demi-paramètre P, de cette courbe. Il eſt clair que quand la vîteſſe du corps ſeroit plus grande, le corps parcourroit un plus grand eſpace AS, dans le même tems, & alors le foyer tomberoit dans un point Q, plus éloigné du ſommet A, de l'origine, puiſque AQ, ſeroit moitié d'un plus grand eſpace, ou demi-paramètre AS. L'éloignement du foyer F, du point A, de l'origine, ſera donc proportionnel à la vîteſſe du mobile; ſi donc l'on vouloit que le corps décrivît toujours une parabole, mais en tendant vers le foyer Q, qui eſt préciſément le cas ſuppoſé par M. Newton, & par lequel il a cru ajouter aux découvertes de Galilée, il eſt manifeſte que pour

conſerver la nature de la courbe, & par conſéquent, le paralléliſme des tendances qui en eſt une ſuite néceſſaire, il faudroit éloigner le foyer Q, à l'infini, afin que les tendances puſſent toujours être conſidérées comme parallèles, relativement à ce foyer infiniment diſtant, & la courbe par conſéquent toujours parabolique: donc alors la vîteſſe imprimée au corps devroit être infinie, puiſque la diſtance du point A, de l'origine de la parabole à ſon foyer F, croît, comme il vient d'être prouvé, en proportion de la vîteſſe qui ſeroit imprimée au corps; & cette diſtance devenant infinie, il eſt clair que la vîteſſe de projection devroit être infinie, comme on l'a ſi ſouvent démontré.

Il eſt donc prouvé, de toutes les manieres poſſibles, que l'*immortel ouvrage des Principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle de M. Newton*, n'eſt d'un bout à l'autre qu'un vrai Roman, qui n'eſt pas encore le plus amuſant, ni le plus agréable à lire, en ce qui concerne la théorie des loix des forces centrales; & un tiſſu de paralogiſmes & de propoſitions fauſſes & abſurdes, à quoi ſe réduiront toujours ces découvertes, ſi ſublimes aux yeux de ſes adulateurs, dont ils penſent que cet homme,

homme, ſi juſtement célèbre à pluſieurs autres égards, a enrichi la Méchanique & l'Aſtronomie phyſique, en laiſſant bien *loin derriere lui les Deſcartes, les Galilées, & les Huighens.*

Fin des Obſervations ſur les Forces centrales.

REMARQUE.

Les Obſervations qui ſuivent ſont purement Mathématiques, & n'ont aucun rapport à la matiere des Forces centrales qu'on vient de traiter; on les place ici, parce qu'elles n'ont pas paru d'une aſſez grande étendue pour devoir faire l'objet d'un Ouvrage particulier.

Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides

TOUTE grandeur, réſultante de la multiplication d'un nombre *N*, quelconque de quantités, ſera toujours d'autant moindre, qu'on ſuppoſeroit un plus grand nombre de variables décroiſſantes, finiſſant toutes par s'anéantir dans un même point, dans ce même nombre *N*, des quantités, par la multiplication deſquelles la grandeur ſeroit produite.

DÉMONSTRATION.

Que ces quantités ſoient *A*, *B*, *C*, *D*.... &c; il eſt évident que, dans le cas où elles ſeroient ſuppoſées conſtantes, la grandeur, réſultante de leur multiplication, ſeroit *ABCD*.

Mais ſi l'on ſuppoſe que pluſieurs de ces mêmes quantités varient, & décroiſſent, par exemple, en allant de la baſe vers le ſommet de la grandeur, où elles finiroient par s'anéantir; il eſt tout auſſi évident qu'alors la grandeur doit être moin-

dre qu'elle n'auroit été ſi toutes les quantités avoient été conſtantes, & n'avoient pas décrû; & que ce décroiſſement de la grandeur ſeroit d'autant plus grand qu'il y auroit un plus grand nombre de variables décroiſſantes, dans le nombre N, des quantités, par la multiplication deſquelles la grandeur devroit être produite. Donc la grandeur décroîtra, en raiſon du nombre des variables décroiſſantes qui auroient concouru à la former.

Dans le cas d'une ſeule variable, la grandeur produite ſeroit $\frac{ABCD}{1}$. Dans le cas de deux variables la grandeur ſeroit $\frac{ABCD}{2}$. Dans le cas de trois, de quatre variables... &c. la grandeur ſeroit $\frac{ABCD}{3}$, $\frac{ABCD}{4}$... &c.

Nommant donc en général A, le produit d'un nombre M, quelconque de quantités, multipliées les unes par les autres; N, le nombre de variables qui entreroient dans ce produit; la grandeur ſera toujour : $\frac{A}{N}$. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

Le théorême précédent eſt le terme où aboutiſſent les principes de l'Arithméti-

que de l'infini, & ceux du calcul intégral; car ayant l'élément x^n, d'une grandeur, ou $x^n dx$, les deux calculs ſe terminent à la règle d'accroître d'une unité l'expoſant de l'élément x^n, ou $x^n dx$; & de diviſer enſuite la quantité x^{n+1}, ou $x^{n+1} dx$; par cet expoſant, ainſi accrû d'une unité, c'eſt-à-dire, par $n+1$, ce qui donne pour grandeur produite $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, en retranchant la quantité infiniment petite dx de la grandeur.

Il eſt évident que ces deux calculs ne font que ſe conformer à l'eſprit du théorême précédent, auxquels ils n'arrivent encore qu'en parcourant une route plus longue, plus compliquée, & bien moins lumineuſe; car l'élément de la grandeur étant ſuppoſé x^n, l'expoſant n, exprimant tout ce que l'on voudra; un nombre entier, ou rompu, poſitif, ou négatif; & cet élément, exprimé en parties de la variable x, devant être multiplié par x, le produit des variables ſera : $x^n \times x' = x^{n+1}$, & leur nombre l'expoſant même $n+1$; puiſque cet expoſant n'exprime autre choſe que le nombre de fois que la variable x, aura été multipliée par elle-même.

Donc, par le théorême précédent, la

grandeur produite par l'élément x^n, multiplié par la variable x^1, ſera $\frac{x^n \times x^1}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

L'élément étant x^n, s'il avoit fallu le multiplier par la variable x^m, la grandeur produite ſeroit toujours $\frac{x^{n+m}}{n+m}$, par le théorême précédent. D'où l'on voit que la règle qui preſcrit d'augmenter d'une unité l'expoſant de la variable, & de diviſer la grandeur par cet expoſant, ainſi augmenté d'une unité, n'eſt qu'un cas particulier de notre théorême; ce cas arrivant, lorſque la variable x, qui doit multiplier l'élément donné x^n, eſt élevée à un expoſant égal à l'unité; alors $m = 1$, & la grandeur $\frac{x^{n+m}}{n+m} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

L'on a beaucoup écrit pour éclaircir les principes Métaphyſiques des nouveaux calculs; mais il ne paroît pas que ce ſoit avec beaucoup de ſuccès; ces calculs laiſſent toujours un louche qui ne peut être entiérement levé que par notre théorême.

S'il s'agit d'expliquer la règle qui preſcrit d'accroître d'une unité l'expoſant n, de la différentielle $x^n dx$, & de diviſer par cet expoſant $n+1$, ainſi accrû d'une unité, pour avoir la grandeur $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; le cal-

cul intégral renvoie au calcul différentiel; & réciproquement le calcul différentiel renvoie au calcul intégral, quand il eſt queſtion de rendre raiſon de la règle de la différentiation, ce qui fait un cercle vicieux; car deux calculs relatifs pourroient être fondés ſur des principes faux, & entiérement erronés, quoiqu'ils s'accordaſſent toujours entr'eux. Ainſi c'eſt n'avoir rien prouvé que de démontrer la juſteſſe du calcul intégral par le calcul différentiel, & celle du calcul différentiel par le calcul intégral. L'autorité de ces calculs ne s'eſt même bien établie dans les Mathématiques, que parce qu'on n'a ceſſé de montrer qu'ils conduiſoient à des réſultats déja connus, & démontrés vrais, ſoit par la Géométrie, ſoit par d'autres méthodes auſſi exactes.

La raiſon donc de la règle qui preſcrit d'accroître d'une unité l'expoſant n, de l'élément x^n, ou différentielle $x^n dx$; c'eſt parce que cet élément doit finir par être multiplié par la variable finie x, dont dx, eſt la différentielle; enſorte que ſi l'élément x^n, avoit été conſtant, la grandeur produite ſeroit $x^n \times x^1 = x^{n+1}$; & ce qui fait qu'il faut diviſer la grandeur x^{n+1}, par l'expoſant $n+1$, c'eſt parce que cet

élément, n'eſt point conſtant, mais variable, & que l'expoſant $n+1$, exprimant le nombre des variables qui forment, par leur produit, la grandeur $x^n \times x^1 = x^{n+1}$, cette grandeur, par le théorême précédent, doit être diviſée par ce même nombre, ou expoſant $n+1$, en raiſon duquel la grandeur a néceſſairement dû décroître. Il paroît ſuivre delà que le calcul différentiel ne ſeroit pas d'une néceſſité abſolue, dans la meſure des ſurfaces & des ſolides; car dès que l'élément $x^n dx$, en produiſant la grandeur, doit finir par devenir $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, il eſt manifeſte qu'on n'a beſoin que de connoître l'élément x^n, exprimé en parties de la variable x, par lequel il devra être multiplié; car dès-lors l'on aura la grandeur x^{n+1}, & le nombre $n+1$, par lequel il faudra la diviſer.

Il eſt évident qu'en faiſant le contraire de cette opération, dont la juſteſſe eſt démontrée, par notre théorême fondamental, on trouvera toujours l'élément d'une grandeur donnée; car cette grandeur étant $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, la multipliant par ſon expoſant $n+1$, & la diviſant par la variable x, par lequel cet élément auroit été mul-

tiplié, l'on aura ſon élément x^n.

Si la grandeur donnée étoit $\frac{x^n}{x^{n+m}}$, la multipliant par ſon expoſant $n+m$, & la diviſant par la variable x^m, par laquelle on ſuppoſeroit qu'elle auroit été multipliée, l'élément de la grandeur ſeroit alors x^n.

Application du Théorême précédent, à la meſure des Surfaces & des Solides.

Si une variable x, eſt multipliée par une conſtante a, la grandeur produite ſera, par le théorême fondamental, $\frac{a x^1}{1}$.

Donc la grandeur produite ſera un rectangle dont la baſe ſera la conſtante a, & x la hauteur.

Si deux variables x & y, ſe multiplient l'une l'autre; y étant la baſe, & x, la hauteur, la grandeur produite ſera $\frac{xy}{2}$, par le même théorême; c'eſt-à-dire, que cette grandeur ſera un triangle qui deviendra iſocelle en ſuppoſant $x = y$.

Si trois variables x, y, z, ſe multiplient, la grandeur produite ſera $\frac{xyz}{3}$, qui ſera une pyramide, ou un cône, tiers d'un

priſme, ou cylindre xyz, de même baſe & hauteur. Dans le cas où $x=y=z$; les trois dimenſions étant égales, la grandeur $\frac{x^3}{3}$, ſeroit le tiers du cube x^3, puiſqu'elle auroit décrû en raiſon de ces trois dimenſions.

L'on voit qu'il en ſeroit toujours de même, quand on ſuppoſeroit un plus grand nombre de variables; diviſant leur produit par leur nombre, l'on aura toujours la grandeur réſultante de leur multiplication.

L'élément d'une parabole, dont le paramètre ſeroit, a, étant $y=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, multipliant cet élément par la hauteur, ou variable x, l'on aura $xy=a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, qui ſeroit la valeur de la grandeur produite par l'élément $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=y$, ſuppoſé conſtant. Mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur, en raiſon de l'expoſant $\frac{3}{2}$, de la variable x, je diviſe le produit par cet expoſant, ce qui donnera $\frac{2}{3}xy=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ pour quadrature indéfinie de cette parabole.

L'élément de la premiere parabole cubique étant, $y=a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, je le multiplie par la hauteur x, ce qui donneroit pour gran-

deur produite, dans le cas où l'élément ſeroit conſtant ; $xy = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$; mais à cauſe du décroiſſement, en raiſon de l'expoſant $\frac{4}{3}$, de la variable, je diviſe le produit par $\frac{4}{3}$, ce qui donnera : $\frac{3}{4} xy = \frac{3}{4} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$, pour valeur de la quadrature de cette courbe.

L'élément de la ſeconde parabole cubique étant : $y = a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$, je le multiplie par la hauteur x, ce qui donneroit, pour grandeur produite, par cet élément, ſuppoſé conſtant : $xy = a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}}$; mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur produite, en raiſon de l'expoſant $\frac{5}{3}$, de la variable, la quadrature de cette courbe ſera : $\frac{3}{5} xy = \frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}}$.

L'équation à toutes les paraboles étant : $y^m = a^{m-n} x^n$, l'élément ſera : $y = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}}$; le multipliant par la hauteur x, la grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant ſeroit : $xy = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n+m}{m}}$; mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur produite, en raiſon de l'expoſant, $\frac{n+m}{m}$ de la variable, cette grandeur, ou qua-

drature de toutes les paraboles ſera : $\frac{m}{n+m} xy = \frac{m}{n+m} a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n+m}{m}}$.

L'équation à toutes les hyperboles, rapportées à leur aſymptote étant, $y^m = a^{m+n} x^{-n}$, l'élément ſera : $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}}$; le multipliant par la hauteur x, la grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant ſeroit : $xy = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}$: mais attendu le décroiſſement de la grandeur en raiſon de l'expoſant $\frac{m-n}{m}$, de la variable, la grandeur produite, ou la quadrature de toutes les hyperboles ſera : $\frac{m}{m-n} xy = \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}$.

Dans l'hyperbole ordinaire, rapportée à ſes aſymptotes, l'on a : $m = n = 1$. Donc la quadrature de cette courbe ſera : $\frac{1}{1-1} xy = \frac{1}{1-1} a^{\frac{1+1}{1}} x^{\frac{1-1}{1}} = \frac{1}{0} xy = \frac{1}{0} a^2 x^{\frac{0}{1}}$.

On remarquera la ſingularité de l'expreſſion de cette quadrature : $\frac{1}{0} a^2 x^{\frac{0}{1}}$, la grandeur a^2, ſe trouve entre deux infinis qui la multiplient ; car $\frac{1}{0} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \infty$, & $\frac{0}{1} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1}{\infty}$; ainſi cette expreſſion peut

ſe réduire à celle-ci : $\infty a^2 x^{\frac{1}{\infty}}$: par le premier infini, la grandeur a^2, croiſſant à l'infini, changeroit d'ordre, & deviendroit d'un ordre plus élevé que a^2, mais elle décroît en même tems à l'infini par le ſecond infini $x^{\frac{1}{\infty}}$; & par-là cette grandeur demeure dans ſon ordre, croiſſant, & décroiſſant en meme tems à l'infini.

Faiſant $a = 1$, l'expreſſion $\infty a^2 x^{\frac{1}{\infty}}$, ſe réduira à : $\infty x^{\frac{1}{\infty}}$, qui nous montre que la quadrature de cette courbe ne peut être déterminée en termes finis, puiſqu'elle ſe trouve entre un coëfficient infini, & dès-là indéterminé, & un expoſant infiniment petit, qui par conſéquent eſt encore indéterminé.

La raiſon principale qui fait que cette courbe ne peut être quarrée, c'eſt que le point de ſa quadrature concourt avec celui où la variable x, devient conſtante. En effet, l'équation à cette courbe eſt : $xy = a^2$; ſon élément ſera donc : $y = a^2 x^{-1}$: multipliant par la hauteur x, l'on aura : $xy = a^2 x^0$. Voilà l'inſtant de la quadrature, il ne s'agit plus que de ſavoir l'état du décroiſſement de la grandeur, exprimé par l'expoſant de la variable ;

Mais la variable eſt ici $x^0 = 1$, qui eſt une conſtante, & non une variable; donc l'expoſant de cette conſtante ne peut pas ſervir à déterminer une grandeur qu'on ſuppoſe produite par une quantité variable.

L'élément de toutes les paraboles étant : $y = a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}}$, ſon quarré ſera : $y^2 = a^{\frac{2m-2n}{m}} \; {}^{\frac{2n}{m}}$; le multipliant par la variable ou hauteur x, l'on aura $xy^2 = a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n+m}{m}}$, pour valeur du ſolide produit par l'élément, $y^2 = a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n}{m}}$ ſuppoſé conſtant : mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur, en raiſon de l'expoſant $\frac{2n+m}{m}$, de la variable, la ſomme infinie de tous les quarrés des ordonnées de toutes les paraboles ſera : $\frac{m}{2n+m} xy^2 = \frac{m}{2n+m} a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n+m}{m}}$.

Si l'on ſuppoſe que y^2, repréſente un cercle dont le rayon ſeroit y, le ſolide ſera transformé en paraboloïde, & alors xy^2, ſeroit un cylindre.

Dans la parabole quarrée, $m = 2$, $n = 1$. Donc le paraboloïde $\frac{m}{2n+m} xy^2$, eſt $\frac{1}{2} xy^2$;

Ainſi ce paraboloïde eſt la moitié du cylindre xy^2, de même baſe & hauteur.

On peut remarquer que le cône n'eſt que le tiers d'un cylindre de même baſe & hauteur, tandis que le paraboloïde en eſt la moitié; ce qui provient de ce que les cercles, élémens du cône, ſont entr'eux en raiſon de x^2, tandis que les cercles, élémens du paraboloïde, ſont en raiſon de $ax = y^2$. Ainſi la variable x, étant plus élevée dans ſon expoſant, dans les élémens du cône que dans ceux du paraboloïde, le cône doit être une moindre partie du cylindre que le paraboloïde.

L'équation au cercle, dont les abſciſſes commencent au centre, étant $y^2 = a^2 - x^2$; ſi l'on multiplie cet élément du ſolide formé du quarré de toutes les ordonnées du quart de cercle, par la hauteur x, l'on aura, pour grandeur produite, par cet élément ſuppoſé conſtant, $xy^2 = a^2x - x^3$. Mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur, en raiſon de l'expoſant 1, & 3, de la variable complexe, la grandeur produite par cet élément ſera : $S.xy^2 = \frac{a^2x}{1} - \frac{x^3}{3}$: faiſant $x = a$, ce ſolide ſera : $\frac{a^3}{1} - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$; c'eſt-à-dire, que la ſomme in-

finie des quarrés des élémens du quart de cercle, eſt égale au $\frac{1}{3}$ du cube du rayon.

Si l'on ſubſtitue la ſuite infinie des cercles décrits avec tous ces rayons à la place de leur quarré, le ſolide xy^2, ſera transformé en cylindre, & le ſolide $\frac{a^2x}{1} - \frac{x^3}{3}$ en demi-ſphère. Donc la demi-ſphère ſera les $\frac{2}{3}$ du cylindre de méme baſe & hauteur.

REMARQUE.

De ce que la ſomme infinie du quarré des élémens du quart de cercle eſt égale au $\frac{2}{3}$ du cube du rayon, c'eſt-à-dire, à $\frac{2}{3}a^3$, il s'enſuit que le quart de cercle, qui eſt égal à la ſomme infinie des ſimples élémens, ſera plus grand que les $\frac{2}{3}$ du quarré du rayon; c'eſt-à-dire, que $\frac{2}{3}a^2$, à cauſe que les élémens du quart de cercle ſont moins élevés dans leur expoſant que leur quarré, & que par conſéquent la grandeur produite par une variable moins élevée dans ſon expoſant, diminue moins que celle engendrée par un élément plus élevé dans le ſien.

L'équation d'une courbe étant : $ay = ax - x^2$; ſon élément ſera $y = \frac{ax - x^2}{a}$: multipliant par la hauteur x, l'on aura

$xy = \frac{ax^2 - x^3}{a} = x^2 - \frac{x^3}{a}$, pour valeur de la grandeur produite par l'élément $y = \frac{ax - xx}{a}$, ſuppoſé conſtant : mais attendu le décroiſſement de la grandeur en raiſon de l'expoſant 2, 3, de la variable complexe, la grandeur produite, ou la quadrature de cette courbe, ſera : $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}$.

De l'équation ci-deſſus : $ay = ax - x^2$, qui eſt à la parabole, l'on tire cette analogie : $a : a - x :: x : y$, qui enſeigne que cette analogie ſe trouve dans la parabole, lorſqu'on prend les abſciſſes [illegible] ſur la double ordonnée, menée par le foyer de la courbe ; cette double ordonnée étant égale au paramètre a, l'analogie relative au ſegment de la parabole, dont la corde eſt égale au paramètre a, eſt : $a : a - x :: x : y$: car au foyer de la courbe, l'abſciſſe $DF = x$ (*fig.* 32), devient égale à $\frac{a}{2}$, & l'ordonnée $AF = y$, égale alors $\frac{a}{4}$. Donc l'équation $ay = ax - x^2$, eſt alors : $\frac{a}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, qui eſt une égalité vraie. Mais l'équation ordinaire à la parabole $y^2 = ax$, donne la même égalité quand l'ordonnée tombe au foyer, puiſqu'alors $y^2 = \frac{a^2}{4}$, & que $ax =$

$ax = \frac{a^2}{4}$. De plus prenant les x, à l'ordinaire sur l'axe AM, de la parabole, & faisant $CN = z$, l'on aura : $AF - EF = AE = \frac{1}{4}a - z = x$. Donc, par la propriété de la parabole : $\frac{1}{4}a^2 - az = ax = y^2 = \overline{EC}^2$; or BD, étant a, & $FD = \frac{1}{2}a$, $nD = \frac{1}{2}a - y$, & $BN = a - \frac{1}{2}a + y = \frac{1}{2}a + y$. Mais, par l'hypothèse : $a : \frac{1}{2}a + y :: \frac{1}{2}a - y : z$; d'où résulte l'égalité $az = \frac{1}{4}a^2 - y^2$, ou $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - az$, comme ci-dessus.

Ainsi l'équation $ay = ax - x^2$, n'est que l'équation à une parabole renversée, dont les abscisses DN (*Fig.* 32), sont prises sur une ligne BD, perpendiculaire à l'axe, & les ordonnées CN parallèles au même axe.

L'on ne s'est un peu étendu ici que pour faire remarquer cette propriété élémentaire de la parabole ; savoir, qu'en menant par son foyer F, la double ordonnée BD qui est toujours égale au paramètre, a, de la courbe, prenant les abscisses sur cette droite BD, sur laquelle on élevera les perpendiculaires ou ordonnées NC, l'on a toujours : $a : a - x :: x : y$, comme on l'a déja observé.

On peut rendre cette analogie générale, en supposant l'abscisse x, multipliée par

un nombre n, quelconque, ce qui donneroit $a : a - x :: nx : y$. La quadrature de la parabole ſeroit alors : $\frac{nx^2}{2} - \frac{nx^3}{3a}$, qui n'eſt qu'un multiple de la parabole $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}$, terminée par la double ordonnée qui paſſeroit par le foyer; & dans le cas où $n = \frac{33}{14}$, la parabole $\frac{nx^2}{2} - \frac{nx^3}{3a}$, ſeroit à peu près égale au demi-cercle, dont le diamètre ſeroit la baſe a, de la parabole, comme il eſt facile de s'en aſſurer.

Delà il ſuit qu'on pourra former l'équation à la parabole en deux manieres; la premiere, en prenant les coupées ſur l'axe; & la ſeconde, en les prenant ſur une corde quelconque a, perpendiculaire à l'axe. Dans le premier cas, l'équation à cette courbe ſera $y^2 = px$, & dans le ſecond $ay = nax - nx^2$. On voit, qu'en faiſant $n = 1$, l'équation ſe réduit à : $ay = ax - x^2$, qui eſt le cas où la corde $a = p$, & paſſe par le foyer de la courbe.

L'élément d'une courbe étant en général : $y = x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} \ldots$ &c. L'on voit, par tout ce qui vient d'être dit, qu'il ſera toujours très-facile d'en avoir la quadrature.

Si l'élément étoit : $2x\sqrt{x^2} = 2x.\overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$; le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $2x^2.\overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$, pour valeur de la grandeur produite par l'élément $2x.\overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$ supposé constant. Mais à cause du décroissement de la grandeur produite, à raison de l'exposant 2, de la variable considérée sous le signe, & de l'exposant $\frac{1}{2}$ auquel elle est élevée, puisque $x^2 \times \overline{x^2}^{\frac{1}{2}} = \overline{x^2}^{\frac{3}{2}}$, le décroissement sera en raison du produit des deux exposans 2 & $\frac{1}{2}$, auquel la variable est élevée, c'est-à-dire, en raison de $2 \times \frac{1}{2} = 1$, la grandeur produite sera donc : $\frac{2x^2.\overline{x^2}^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{2}{3}x \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}x^3$. Et en effet, $2x.\overline{x^2}^{\frac{1}{2}} = 2x^2$; multipliant cet élément par la hauteur x, & divisant le produit par l'exposant 3, de la grandeur produite, l'on aura : $\frac{2}{3}x^3$.

L'on voit par-là que quand la variable qui multiplie hors du signe, est l'élément de la variable qui est sous le signe, comme

en cet exemple, $2x.\overline{x^2}^{-\frac{1}{2}}$, il ſuffit d'ajouter une unité à l'expoſant du ſigne, & diviſer enſuite la grandeur par cet expoſant accru d'une unité. C'eſt-là la règle que preſcrit le calcul intégral.

Si l'élément donné eſt, $nx^{n-1}.\overline{x^n}^{-\frac{1}{2}}$, le multipliant par la hauteur x, l'on aura : $nx^n.\overline{x^n}^{-\frac{1}{2}} = n.\overline{x^n}^{\frac{3}{2}}$, pour grandeur produite par l'élément $nx^{n-1}.\overline{x^n}^{-\frac{1}{2}}$, ſuppoſé conſtant. Mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur, $n.\overline{x^n}^{\frac{3}{2}}$, à raiſon des deux expoſans n, $\frac{3}{2}$, auxquels la variable eſt élevée, le décroiſſement ſera en raiſon de $\frac{3n}{2}$, produit des deux expoſans; la grandeur produite ſera donc : $\frac{n.\overline{x^n}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3n}{2}} = \frac{2}{3}n\overline{x^n}^{\frac{3}{2}}$.

Si l'élément donné eſt en général; $m.ax^{n-1}.\overline{ax^n}^{p}$, le multipliant par la hauteur x, l'on aura : $m.ax^n.\overline{ax^n}^{p} = m.\overline{ax^n}^{p+1}$, pour grandeur produite par cet élément

ſuppoſé conſtant. Mais attendu le décroiſſement, en raiſon du produit : $n \times \overline{p+1} = np+n$, des expoſans auxquels la variable eſt élevée, la grandeur produite par cet élément ſera : $\frac{m.ax^{\overline{p+1}}}{np+n}$.

D'où il ſuit que toutes les fois que l'on aura hors du ſigne, une grandeur ax^{n-1}, & ſous le ſigne la même grandeur ax^n, avec un expoſant plus grand d'une unité que l'expoſant de celle qui eſt hors du ſigne, il ſera toujours facile d'avoir la grandeur produite par un tel élément.

Si l'élément donné étoit : $\overline{a+bx}^{p}$, le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $x.\overline{a+bx}^{p}$, pour valeur de la grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant. Mais la variable x, qui eſt ſous le ſigne étant déja élevée à l'expoſant p, en la multipliant encore par x, elle ſera élevée à l'expoſant $p+1$: ſi donc on élevoit tout le terme : $a+bx$, à l'expoſant $p+1$, la grandeur produite par l'élément $\overline{a+bx}^{p}$, ſeroit alors $\frac{\overline{a+bx}^{p+1}}{p+1}$. Or cette quantité doit, 1°. être diviſée par la conſ-

tante b, qui multiplie la variable ſous le ſigne, & qui ne la multiplie point hors du ſigne. La grandeur ſera donc : $\frac{\overline{a+bx}^{p+1}}{p+1\times b}$;

2°, en élevant tout le terme $a+bx$ à l'expoſant 1, on y a compris la conſtante a, qui auroit dû en être retranchée, préciſément comme il ſeroit arrivé ſi au lieu d'avoir pour élément $\overline{a+bx}^{p}$, on avoit eu ſimplement $\overline{bx}^{p}$. Il faudra donc retrancher de la grandeur cette conſtante élevée à l'expoſant $p+1$, & diviſée par $p+1\times b$. Donc la grandeur produite par l'élément, $\overline{a+bx}^{p}$, ſera : $\frac{\overline{a+bx}^{p+1}}{p+1\times b} - \frac{a^{p+1}}{p+1\times b}$.

Si la conſtante avoit eu le ſigne moins, il eſt évident qu'il auroit fallu l'ajouter à la grandeur, vu que cette conſtante, poſitive, ou négative ſe trouve toujours de trop dans la grandeur.

On peut ſuivre ici la règle que preſcrit le calcul intégral qui eſt de ſuppoſer la variable égale à zéro ; ſi tous les termes

de la grandeur ſe détruiſent, la grandeur eſt alors complette, s'il y a quelques termes qui ſubſiſtent, il faudra les retrancher, ou les ajouter à la grandeur, ſuivant que ces termes ſeroient poſitifs ou négatifs, à cauſe que la grandeur eſt toujours trop grande, ou trop petite des quantités qu'elle contient que la variable ne multiplie point.

Si l'élément donné étoit : $2x.\overline{x^2+a^2}^{\frac{1}{2}}$, le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $2x^2.\overline{x^2+a^2}^{\frac{1}{2}}$, pour grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant; mais à cauſe du décroiſſement de la grandeur en raiſon du produit des deux expoſans $2, \frac{3}{2}$ auxquels la variable eſt élevée, la grandeur ſera : $\frac{2}{3}.\overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$.

On ne parlera plus des conſtantes qu'il faudroit ajouter ou retrancher à la grandeur, attendu ce qu'on en a dit.

Si l'élément étoit : $x.\overline{x^2+a^2}^{\frac{1}{2}}$, la grandeur produite ſeroit, ſuivant ce qui vient d'être dit : $\frac{1}{3}.\overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$, moitié par conſéquent de la grandeur ci-deſſus : $\frac{2}{3}.\overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$.

Si l'élément étoit plus généralement : $\overline{a \pm x}^{\frac{n}{m}}$, le multipliant par la hauteur x ; l'on auroit : $x \cdot \overline{a \pm x}^{\frac{n}{m}}$, pour grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant. Mais attendu le décroiſſement de la grandeur, en raiſon du produit des deux expoſans, 1, & $\frac{n+m}{m}$, auxquels la variable eſt élevée, la grandeur produite ſera : $\frac{m}{n+m} \cdot \overline{a \pm x}^{\frac{n+m}{m}}$.

Si enfin l'élément donné étoit en général : $B \cdot x^{m-1} \overline{x^m \pm r a^q}^{p}$, la grandeur produite ſeroit toujours : $\frac{B \cdot \overline{x^m \pm r a q}^{p+1}}{p+1 \cdot m \cdot r}$.

Si l'élément étoit : $\overline{a^2 + bx \cdot a^2 x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$, le multipliant par la hauteur x, l'on auroit : $\frac{1}{2} \overline{a^2 x + b x^2 \cdot a^2 x + bx^2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \overline{ax + bx^2}^{\frac{3}{2}}$, pour grandeur produite par cet élément ſuppoſé conſtant. Mais le décroiſſement de la grandeur n'étant ici qu'en raiſon de l'expoſant $\frac{3}{2}$, auquel les deux termes qui compoſent la grandeur ſont égale-

ment élevés, la grandeur produite ſera : $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.\overline{ax+bx^2}^{\frac{1}{2}}$: tous les termes de cette grandeur renfermant la variable, cette grandeur ſera complette, & il n'y aura rien à y ajouter, ni à en retrancher.

On voit à préſent d'une maniere plus ſenſible ce qui fait qu'une grandeur eſt complette, ou incomplette. Quand après avoir multiplié l'élément donné par la hauteur x, la partie de la grandeur réſultante de ce produit qui multiplie hors du ſigne, eſt ou l'égale, ou le multiple quelconque de celle qui eſt ſous le ſigne, comme dans ce dernier exemple ; alors la grandeur eſt égale à la partie qui eſt ſous le ſigne, élevée ſeulement à un expoſant plus grand d'une unité que celui que cette même partie de la grandeur a ſous le ſigne ; multipliée, la dite partie de grandeur, par le nombre, ou la conſtante quelconque qui la multiplie hors du ſigne.

Ainſi : $\frac{1}{2}\overline{a^2x+bx^2}.\overline{a^2x+bx^2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\overline{a^2x+bx^2}^{\frac{3}{2}}$. Cette grandeur étant évidemment complette, il n'y aura donc rien à y ajouter, ni à en retrancher, & il ſuffira de la diviſer par l'expoſant $\frac{3}{2}$, auquel

elle eſt élevée, attendu que le décroiſſement de la grandeur eſt toujours en raiſon de l'expoſant auquel la grandeur eſt élevée.

Nous avons vu ci-devant qu'ayant un élément x^2, multiplié par une hauteur x, la grandeur produite étoit, $\frac{x^3}{3}$, réſultat qu'on obtenoit également en mettant la variable ſous cette forme : $x \times x \ldots \overline{x^2}^{\frac{1}{2}} = x^2 . \overline{x^2}^{\frac{1}{2}}$, & la faiſant varier à raiſon du produit des deux expoſans 2, & $\frac{1}{2}$, auxquels elle étoit élevée.

Dans l'exemple ci-deſſus, $a^2x + bx^2$, qui multiplie hors du ſigne repréſente la variable x^2, & $\overline{a^2x+bx^2}^{\frac{1}{2}}$, racine de la premiere, repréſente x, racine de x^2. Or comme la grandeur produite x^3, eſt diviſée par ſon expoſant 3, ſomme des expoſans 1, & 2, de la variable x, & x^2; de même la grandeur $\overline{a^2x+bx^2}^{\frac{3}{2}}$, doit être diviſée par la ſomme $1+\frac{1}{2}$, des expoſans des quantités, $\overline{a^2x+bx^2}^{1} . \overline{a^2x+bx^2}^{\frac{1}{2}}$ qui la forment par leur multiplication. Ainſi quand un quarré compoſé de quan-

tités variables eſt multiplié par ſa racine, la grandeur produite par l'élément doit toujours être diviſée par la ſomme des expoſans des deux quantités qui en ſe multipliant forment la grandeur.

Mais quand la quantité qui multiplie hors du ſigne n'eſt ni l'égale, ni le multiple de celle qui eſt ſous le ſigne, comme en cet exemple, $2.x^2.\overline{x^2+a^2}^{\frac{1}{2}}$, il eſt manifeſte qu'en formant la grandeur : $2.\overline{x^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$, cette grandeur ſera plus que complette, attendu que dans les deux quantités qui ſe multiplient, l'une n'eſt pas le quarré de l'autre, comme dans l'exemple précédent, il y a ſous le ſigne la conſtante a^2, qui ne ſe trouve point dans la quantité qui multiplie hors du ſigne, & cette quantité ſe trouvera de trop dans la grandeur, à cauſe qu'elle eſt poſitive, comme elle y feroit de moins ſi elle étoit négative. Donc il faudra la retrancher dans le premier, & l'ajouter dans le ſecond.

L'on ne s'étendra pas davantage ſur cette méthode de trouver les grandeurs réſultantes du produit d'un élément variable par une hauteur auſſi variable, quoi-

qu'il fût poſſible d'embraſſer un beaucoup plus grand nombre de cas, même très-compliqués, attendu que l'on ne s'eſt propoſé d'autre objet ici que de montrer que la règle qui preſcrit de diviſer la grandeur produite par un élément variable, par l'expoſant auquel la variable eſt élevée, eſt vraie en ſoi indépendamment des principes du calcul différentiel d'où on la déduit ordinairement, & de l'Arithmétique de l'infini; c'eſt-à-dire, qu'en faiſant même abſtraction de ces deux calculs, & les conſidérant comme non connus, il n'en eſt pas moins vrai que toute grandeur produite par un élément variable, décroît, par delà de ce qu'elle feroit ſi ſon élément étoit conſtant, en raiſon de l'expoſant auquel la variable qui entre dans cette grandeur eſt élevé. Et ce principe ainſi détaché du calcul différentiel, & de l'arithmétique de l'infini, peut avoir ſon utilité, ſur-tout dans les Livres élémentaires de Géométrie, où l'on peut l'employer, pour démontrer d'une maniere fort ſimple tout ce qui a rapport à la meſure des ſurfaces & des ſolides, & à trouver même la quadrature approchée du cercle, de l'ellipſe, de l'hyperbole.... &c; car l'équation, par exemple, au cer-

cle étant : $y^2 = ax - x^2$, l'élément ſera : $y = \sqrt{ax - x^2}$, multipliant par la hauteur x, l'on aura : $xy = x \cdot \sqrt{ax - x^2}$, réduiſant le radical en ſuite infinie, multipliant chaque terme par la variable x, qui multiplie hors du ſigne, & diviſant chaque terme par l'expoſant auquel la variable x, s'y trouvera élevée, il eſt clair que l'on auroit la quadrature approchée du cercle, & par le même principe, la quadrature approchée de l'ellipſe, de l'hyperbole, & des autres courbes non quarrables.

On voit auſſi que le principe métaphyſique de l'intégration, & de la différentiation eſt totalement éclairci par notre théorême, puiſque les différentielles dx, dy, dz... &c, c'eſt-à-dire, les quantités infiniment petites ne ſont nullement néceſſaires pour déterminer les grandeurs par leurs élémens, ou les élémens par les grandeurs données. La grandeur donnée étant x^n, ſon élément ſera nx^{n-1}, ou $nx^{n-1}dx$, en ſuppoſant l'élément nx^{n-1}, multiplié par $dx = \frac{x}{\infty}$. Dans le calcul différentiel l'élément nx^{n-1}, eſt multiplié par une partie infiniment petite de la variable ou hauteur x; enſorte que quand l'élé-

ment nx^{n-1}, repréſente, par exemple, une ligne, le produit $nx^{n-1}dx$, eſt un rectangle infiniment petit, dont la hauteur eſt $dx = \frac{x}{\infty}$. Or intégrer la différentielle $nx^{n-1}dx$, c'eſt prendre la ſomme de tous les rectangles infiniment petits $nx^{n-1}dx$, ou, ce qui revient au même, c'eſt ſubſtituer une hauteur finie x, à la hauteur infiniment petite dx, & diviſer la grandeur produite par cette ſubſtitution, par l'expoſant n, auquel la variable ſe trouve alors élevée, puiſque, par notre théorême fondamental, la grandeur décroît alors en raiſon de l'expoſant auquel elle s'éleve.

La plupart des Auteurs obſcurciſſent ce principe ſi ſimple, par la maniere dont ils expoſent la règle de l'intégration. *Ajoutez*, diſent-ils, *une unité à l'expoſant de la variable*, $n\,x^{n-1}\,dx$, *diviſez enſuite par cet expoſant, ainſi accru d'une unité, multiplié par la différentielle* dx, & vous aurez l'intégrale $\frac{n\,x^{n-1+1}\,dx}{n\,dx} = x^n$.

D'autres énoncent la règle d'une autre maniere, après avoir dit qu'il faut augmenter l'expoſant de la variable élémentaire d'une unité, & diviſer par ce même expoſant ainſi augmenté, ce qui réduit

la grandeur ſous cette forme $\frac{nx^{n-1+1}}{n}$ $dx = x^n dx$, ajoutent, *& effacez la différentielle* dx. Ce qui donne lieu à une foule d'objections, & à quantité de raiſonnemens métaphyſiques, pour & contre le principe des infiniment petits, qui ſeroient prévenus, ſi la règle de l'intégration, & de la différentiation étoit énoncée comme il convient.

Voici comment il me paroît que cette règle doit être énoncée. La différentielle étant $nx^{n-1}dx$. Il faut dire, *ſubſtituez l'intégrale* x, *à ſa différentielle* dx, *ce qui accroîtra d'une unité l'expoſant* n—1, *de la variable, & diviſez la grandeur* $nx^{n-1+1} = nx^n$, *par l'expoſant de la grandeur* nx^n, *ou par cet expoſant* n—1+1, *ainſi augmenté d'une unité.*

Il eſt évident que l'opération de l'intégration ne préſente plus de difficulté à éclaircir, dès que la règle eſt énoncée de la ſorte; on voit comment, & pourquoi la quantité infiniment petite dx, diſparoît, ſans que la grandeur en puiſſe être altérée, parce que la règle ne dit pas d'effacer cette quantité de la grandeur produite $x^n dx$; mais de lui ſubſtituer ſon intégrale x, dans l'expreſſion $nx^{n-1}dx$,

ce qui réduit cette expreſſion à $n x^n$. Et comme, dans ce cas, la variable s'eſt élevée à l'expoſant n, & que, par le théorême précédent, la grandeur doit décroître en raiſon de ce même expoſant; il eſt clair que la grandeur produite, ou l'intégrale de $n x^{n-1} dx$, ſera $\frac{n x^{n-1} \times x}{n-1+1} = x^n$.

Par la même raiſon les obſcurités qu'on rencontre dans la différentiation, diſparoîtroient ſi la règle générale étoit établie comme il ſuit.

Une puiſſance quelconque x^n, étant donnée, en trouver la différentielle. La règle ſe réduit, 1°, à retrancher une unité à l'expoſant n, de la grandeur; 2°, à multiplier par l'expoſant n, & par la différentielle dx, ce qui fait trouver la différentielle $n x^{n-1} dx$. On pourroit énoncer la règle de cette ſorte : *ſubſtituez la différentielle* dx, *à ſon intégrale* x, *ce qui diminuera d'une unité l'expoſant de la variable* x^n, *& multipliez par l'expoſant* n, *de la grandeur donnée, & vous aurez la différentielle* $n x^{n-1} dx$, *demandée*. Il eſt évident que la différentiation eſt l'inverſe de l'intégration. Si la grandeur donnée étoit un produit de pluſieurs variables, par exemple, xy, ſubſtituant la différentielle

dx

dx à ſon intégrale. L'on auroit d'abord $y\,dx$, & ſubſtituant enſuite à l'intégrale y, ſa différentielle dy, l'on auroit encore $x\,dy$. Donc la différentielle de xy ſeroit $y\,dx + x\,dy$.

Si le produit des variables étoit en général $x^n y^m$, la différentielle ſeroit, par la même règle : $n y^m x^{n-1} dx + m x^n y^{m-1} dy$.

Si la grandeur donnée étoit : $\frac{x^n}{y^m} = x^n y^{-m}$, la même règle feroit trouver pour différentielle de cette grandeur : $n y^{-m} x^{n-1} dx - m\,x^n\,y^{-m-1}\,dy = \frac{n\,x^{n-1} dx}{y^m} - \frac{m\,x^n dy}{y^{m+1}} = \frac{n\,y\,x^{n-1} dx - m\,x^n dy}{y^{m+1}}$.... &c. en préſentant les règles des nouveaux calculs de cette ſorte, les principes en ſont rigoureux, & leur métaphyſique fort claire, ce qui peut encore ſervir à juſtifier ces procédés des analyſtes de réduire à zéro toute quantité infiniment petite à l'égard d'une autre quantité, à laquelle elle devroit ſe réunir, ſoit par addition, ſoit par ſouſtraction; puiſque, dans les deux cas, les réſultats ſeroient les mêmes.

La plus grande utilité que les Mathématiques aient retirée des nouveaux calculs conſiſte principalement dans ce point; ſavoir, qu'étant donnée une équation

quelconque, renfermant un nombre quelconque de variables, l'on peut toujours transformer cette équation en une nouvelle équation. L'équation donnée étant, par exemple, $y^m = ax^n$, l'on peut toujours, en la différenciant, en tirer la nouvelle équation $my^{m-1}dy = nax^{n-1}dx$, qui suppose cette proportion : $my^{m-1} : nax^{n-1} :: dx : dy$; c'est-à-dire, que les élémens, ou différentielles dx, dy des variables x & y, sont toujours entr'eux comme les élémens my^{m-1}, nax^{m-1}, des grandeurs égales y^m, ax^n, ou, si l'on veut, que les élémens des grandeurs égales, y^m, ax^n, sont entr'eux en raison réciproque des élémens ou différentielles dy, dx.

Cette analogie est fondée sur le principe de l'égalité des accroissemens, ou des décroissemens des variables qui forment l'équation donnée. Si l'équation donnée est, par exemple, $y^2 = xz$, il est manifeste que cette égalité devant toujours avoir lieu, si y^2, croît ou décroît d'une quantité quelconque N, xz, doit croître ou décroître précisément d'une quantité $M = N$; ensorte que l'on aura, après l'accroissement, ou le décroissement, $y^2 \pm N = xz \pm N$; d'où on tirera $N = M$. Ainsi, dans l'exemple présent, l'on aura : $2ydy =$

$z\,dx + x\,dz$ qui ſont les accroiſſemens ou les décroiſſemens des grandeurs égales y^2, & xz. Si l'équation donnée étoit $y^2 = ax$, l'on en tireroit $2y\,dy = a\,dx$ qui eſt l'égalité des accroiſſemens des variables y^2, ax; car quant x, devient $x + dx$, y, devient $y + dy$. Donc : $\overline{x + dx} \times a = \overline{y + dy}^2$, ce qui donne : $ax + a\,dx = y^2 + 2y\,dy + dy\,dy$. Or, par l'équation donnée, $y^2 = ax$. Donc : $a\,dx = 2y\,dy + dy\,dy$; retranchant le dernier terme qui eſt infiniment petit à l'égard du premier l'égalité ſe réduira à $a\,dx = 2y\,dy$. D'où ſuit l'analogie : $a : 2y :: dy : dx$.

L'équation donnée étant en général : $y^m = ax^n$, l'on en tirera, en différenciant $my^{m-1}dy = nax^{n-1}dx$, qui eſt l'égalité des accroiſſemens des grandeurs variables y^m, ax^n; puiſqu'en effet quand x, devient $x + dx$, l'ordonnée y, devient $y + dy$. Donc $\overline{y + dy}^m = a \times \overline{x + dx}^n$, ce qui ſe réduira à $y^m + my^{m-1}dy = ax^n + nax^{n-1}dx$, à cauſe des termes où ſe trouveroient $dydy$, $dydydy$. . . . , & $dxdx$, $dxdxdx$. . . . &c. qui ſont nuls relativement à ceux qui les précéderoient; & comme, par l'équation donnée $y^m = ax^n$, il s'enſuit que l'on aura : $my^{m-1}dy = nx^{n-1}dx$.

; Ainſi une équation quelconque $y^m = ax^n$, étant donnée, on pourra toujours, en la différenciant, en tirer la nouvelle équation : $my^{m-1}dy = nx^{n-1}dx$, & les rapports égaux $\frac{my^{m-1}}{nax^{n-1}} = \frac{dx}{dy}$, ou $\frac{nax^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{dy}{dx}$, ce qui fournit un moyen des plus ſimples pour réſoudre une foule de queſtions.

Par exemple, ſi on multiplie par l'ordonnée, y, l'équation $\frac{my^{m-1}}{nax^{n-1}} = \frac{dx}{dy}$, l'on aura : $\frac{my^m}{nax^{n-1}} = \frac{ydx}{dy}$, pour expreſſion de toutes les ſoutangentes, dans toute eſpece de courbes ; & attendu que $y^m = ax^n$, cette expreſſion ſera encore : $\frac{max^n}{nax^{n-1}} = \frac{ydx}{dy}$; c'eſt-à-dire, que dans toute eſpece de courbes la ſoutangente BM (*Fig. 33*), eſt toujours égale au produit $m \times ax^n$ de l'expoſant m de la grandeur y^m, par la grandeur ax^n, diviſé par l'élément nax^{n-1}, de cette même grandeur, valeur qui réſulte de la ſimilitude des triangles EDN, DBM, qui donne l'analogie $EN(dy) : ED(dx) :: DB(y) : BM$. D'où $BM = \frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{nax^{n-1}} = \frac{max^n}{nax^{n-1}}$. Dans le cas de la parabole quarrée $y^2 = ax$, la ſoutangente ſera par conſéquent : $\frac{2 \times ax}{a} = 2x$.

Dans le cas des paraboles cubiques $y^3 = ax^2$, $y^3 = a^2x$, les ſoutangentes ſeront : $\frac{3 \times ax^2}{2ax} = \frac{3}{2}x$, & $\frac{3 \times a^2x}{a^2} = 3x$.

Dans le cas du cercle $y^2 = ax - x^2$, la ſoutangente ſera : $\frac{2 \times \overline{ax - x^2}}{a - 2x}$, ſi l'équation eſt $y^2 = a^2 - x^2$, la ſoutangente ſera : $\frac{2 \times \overline{a^2 - x^2}}{-2x}$.

Dans le cas de l'hyperbole : $y^2 = ax + x^2$, la ſoutangente ſera : $\frac{2 \times \overline{ax + x^2}}{a + 2x}$.

Dans le cas de la parabole renverſée (*fig.* 34) dont nous avons vu que l'équation étoit : $ay = ax - x^2$, la ſoutangente $ED = \frac{1 \times \overline{ax - x^2}}{a - 2x}$, cette ſoutangente eſt donc la moitié de la ſoutangente EC, du cercle, dont l'expreſſion eſt : $\frac{2 \times \overline{ax - x^2}}{a - 2x}$, double de $\frac{1 \times \overline{ax - x^2}}{a - 2x}$.

Comme toutes les ordonnées de la parabole renverſée $NBOA$, ſont $y = \frac{ax - x^2}{a}$, & que le diviſeur a, eſt une quantité conſtante, il s'enſuit que ces ordonnées, par exemple, EB, RO ſeront toujours entr'elles, dans différens points de la courbe, comme les rectangles $NE \times EA$,

$NR \times RA$, des parties correſpondantes de l'axe NA, ou, ce qui eſt le même rapport, comme les quarrés des ordonnées EP, RM, correſpondantes, du cercle $NMAN$. Ainſi $BE : OR :: \overline{PE}^2 : \overline{MR}^2$. ou $\overline{MR}^2 (\frac{1}{4}a^2) : OR (\frac{1}{4}a) :: \overline{PE}^2 (ax - x^2) : BE (y)$; c'eſt-à-dire, que : $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a :: ax - x^2 : y$, ou $a : 1 :: ax - x^2 : y$; d'où $ay = ax - x^2$.

Si la courbe eſt l'hyperbole entre ſes aſymptotes : $a^2 = xy$, ou $a^2x^{-1} = y$, la ſoutangente ſera : $\frac{1 \times a^2x^{-1}}{-1 \times a^2x^{-2}} = -x$.

Si la courbe eſt l'ellipſe : $\frac{a}{b}y^2 = ax - x^2$, ou $y^2 = \frac{abx - bx^2}{a}$, la ſoutangente ſera :

$$2 \times \left\{ \frac{\frac{abx - bx^2}{a}}{\frac{ab - 2bx}{a}} \right\} = \frac{2 \times \overline{ax - x^2}}{a - 2x}.$$

Si la courbe eſt : $a^3y = \overline{ax - x^2}^2 = a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$, la ſoutangente ſera :

$$1 \times \left\{ \frac{\frac{a^2x^2 - 2ax^3 + x^4}{a^3}}{\frac{2a^2x - 6ax^2 + 4x^3}{a^3}} \right\} = 1 \times \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a^2 - 6ax^2 + 4x^2}.$$

Cette courbe eſt celle qui réſulteroit du rapport des ordonnées CB, GE... &c.

avec celui des quatrièmes puiſſances des ordonnées CA, GD, correſpondantes, du cercle $FDAH$ (*Fig.* 37); c'eſt-à-dire, que ſi l'on ſuppoſe que $\overline{AC}^4 : \overline{DG}^4 :: BC : EG$, & que cette analogie ait toujours lieu, ſuppoſant le diamètre $FH = a$, & la plus haute ordonnée BC, de la courbe $FEBH$, égale à $\frac{a}{16}$, l'équation à cette courbe ſera : $a^3y = a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$; car l'on auroit : $\overline{AC}^4 \left(\frac{a^4}{16}\right) : BC\left(\frac{a}{16}\right) :: \overline{DG}^4 \overline{(ax - x^2)^2} : EG\,(y)$, c'eſt-à-dire, que $\frac{a^4}{16} : \frac{a}{16} :: \overline{a^2x^2 - 2ax^3 + x^4} : y$. D'où l'on tireroit : $a^3 : 1 :: \overline{a^2x^2 - 2ax^3 + x^4} : y$, & par conſéquent l'équation : $a^3y = a^2x^3 - 2ax^3 + x^4$.

L'on voit que la quadrature de cette courbe ſeroit : $\frac{\frac{a^2x^3}{3} - \frac{2ax^4}{4} + \frac{x^5}{5}}{a^3}$, ſuppoſant $a = x$, cette quadrature ſeroit : $\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{5} - \frac{a^2}{2} = \frac{10a^2 + 6a^2 - 15a^2}{30} = \frac{a^2}{30}$, c'eſt-à-dire, que l'eſpace courbe $FEBH$, ſeroit la trentieme partie du quarré a^2, du diamètre FH, du cercle $FAHF$; & comme le rectangle $NPFH$, circonſcrit

à la courbe, eſt $FH \times BC = \frac{a^2}{16}$; il s'enſuit que cet eſpace courbe $FEBH$, ſera au rectangle circonſcrit $PNHF$, comme $\left.\begin{matrix}\frac{a^2}{30}\\ \frac{a^2}{16}\end{matrix}\right\} = \frac{16a^2}{30a^2} = \frac{8}{15}$.

Obſervations ſur les propriétés ſpéciales des Courbes rectifiables.

LA propriété ſpéciale des courbes rectifiables ne conſiſte que dans un point; ſavoir, qu'un arc quelconque de ces courbes peut être diviſé proportionnellement aux parties d'une ligne droite.

Soit une courbe Aon, ſuſceptible de rectification, ſon axe AM (*Fig.* 35). Dès que cette courbe peut être rectifiée, on pourra donc ſuppoſer une tangente AK, qui lui ſeroit égale ; menant la corde An, de l'arc Aon, de la courbe, & joignant l'extrémité n, de cette corde, & l'extrémité K, de la tangente par la ligne kn. Si l'on ſuppoſe actuellement une infinité de parallèles Bb, Cc, Dd, Ee... &c.

à la droite *Kn*, & à la même distance l'une de l'autre, je dis que ces parallèles couperont la courbe *Aon*, en une infinité d'arcs égaux *Ao*, *oo*, *oo*.... &c.; ensorte que la courbe *Aon*, & les droites *AK*, *An*, seront coupées proportionnellement par ces parallèles.

Puisqu'on suppose que ces trois lignes sont coupées par une infinité de parallèles infiniment près l'une de l'autre, & au même intervalle; il s'ensuit que l'extrémité *b*, de la première parallèle *Bb*, sera infiniment proche du point *A*, origine de la courbe. Donc vers ce point l'arc *Ao*, de la courbe & la tangente *AB*, se confondant, seront par conséquent égaux entr'eux, puisque la courbe est supposée poligone.

Mais la tangente finie *AK*, & la courbe *Aon*, qui lui est supposée égale, se trouvent divisées par les parallèles *Bb*, *Cc*, *Dd*... &c. dans le même nombre infini de parties; & deux de ces parties vers *A*, étant égales, il s'ensuit que toutes les autres parties des deux lignes seront pareillement égales; car les arcs *Ao*, *Oo*, *oo*.... &c. ne peuvent être supposés croître, ni décroître de *A*, vers *n*, puisque, dans le premier cas, leur somme

excedéroit la tangente AK, & que dans le ſecond cas, elle ſeroit inférieure à cette même tangente, ce qui ſeroit également contraire à l'hypothèſe. Donc les arcs infiniment petits $Ao, oo, oo...$ &c. ne pouvant ni croître, ni décroître ſeront par conſéquent égaux entr'eux, & à la tangente infiniment petite AB. Donc l'arc An, & les droites AK, An, ſeront coupés proportionnellement par les parellèles $Bb, Cc, Dd...$ &c. à la ligne Kn. Et tous les arcs $Ao, oo, oo....$ &c. égaux entr'eux ſeront auſſi égaux, chacun à chacun, à chaque partie $AB, BC, CD....$ correſpondante de la tangente finie AK. Mais il eſt clair que cette égalité ſubſiſtera encore dans le cas où ces arcs, & les parties correſpondantes de la tangente deviendront des quantités finies, puiſque deux tous qui ont le même nombre infini de parties égales ſont néceſſairement égaux entr'eux.

D'où il ſuit qu'ayant une courbe rectifiable quelconque Aon, ſi l'on mene à cette courbe une tangente AK, par le point A, de l'origine, & que cette tangente lui ſoit égale, tirant la ligne Kn, & diviſant la tangente AK, en tel nombre de parties égales que l'on voudra, par des parallè-

les *Hh*, *Gg*, *Ff*, *Ee*... &c. à la droite *Kn*, cette courbe ſera diviſée, en arcs égaux *Ao*, *oo*, *oo*.... &c. par les mêmes parallèles.

Et réciproquement ſi on diviſe la courbe *Aon*, & ſa corde *AK*, dans le même nombre de parties égales, tirant par les points de diviſions les lignes *ob*, *oc*, *od*... &c. qui, ſuivant ce qui vient d'être dit, ſeront parallèles entr'elles; menant enſuite par le point *A*, de l'origine, la tangente indéfinie *AK*, la dernière parallèle *nK*, coupera cette tangente en un point *K*, qui ſera toujours tel que la tangente *AK*, ſera égale à la courbe rectifiable *Aoon*.

REMARQUE.

La propoſition précédente nous développe avec clarté toute la théorie des rectifications. Elle nous montre que deux choſes peuvent rendre ſeules une courbe rectifiable; 1°, La diviſion de ſes arcs en parties égales *Ao*, *oo*, *oo*.... &c. par des parallèles *ob*, *oc*, *od*.... &c; 2°, La diviſion de la corde *An*, en parties pareillement égales, par les mêmes parallèles. Quand ces deux choſes ſe rencon-

trent. Que les lignes *o b*, *o c*, *o d*. . . . &c. ſont parallèles. Qu'elles diviſent l'arc & la corde en parties égales entr'elles, la courbe eſt toujours rectifiable, puiſqu'en tirant la tangente *A K*, & prolongeant les parallèles juſqu'à la rencontre de cette tangente, les parties *AB*, *BC*, *CD*. . . &c. de cette tangente ſont égales chacune à chaque arc *A o*, *o o*, *o o*. . . . &c. correſpondant de la courbe, & qu'enfin la dernière parallèle *NK*, coupe toujours la tangente en un point *K*, tel que la courbe *A o n*, & la tangente *A K* ſont toujours égales. Mais quand les lignes *o b*, *o c*, *o d*. . . &c. ou ne ſont point parallèles, ou que l'étant, les arcs *A o*, *o o*, *o o*. . . &c. étant faits ou ſuppoſés égaux, les parties *A b*, *b c*, *c d*. . . . &c. correſpondantes de la corde *A n*, ne ſont point égales, ou que celles-ci étant faites ou ſuppoſées égales, les arcs qui leur correſpondent ne ſont pas égaux, ainſi qu'il arrive dans toute eſpece d'arcs circulaires, elliptiques, paraboliques, hyperboliques, & dans une infinité d'autres courbes, dès-lors ces mêmes courbes ne peuvent être ſuſceptibles de rectification, puiſqu'on ne peut en déduire l'égalité de la ſuite des arcs *A o*, *o o*, *o o*. . . . &c, avec la ſuite

des parties correſpondantes *AB*, *BC*, *CD*.... &c. de la tangente, ni par conſéquent l'égalité ultérieure de la tangente *AK*, avec la courbe *Aon*.

Si l'on diviſe, par exemple, le quart de circonférence *ABF* (*Fig.* 36), en parties égales, par les paralléles *AC*, *BR*, *CQ*... &c. les arcs *AB*, *BC*, *CD*.... &c. étant égaux, les parties du rayon *CR*, *RQ*, *QP*.... &c, ni celles de la corde *AF*, ne ſont point égales : ſi au contraire on fait ces parties de rayon, & de corde égales, dès-lors les arcs *AB*, *BC*, *CD*.... &c. ne ſeront plus égaux, ce qui a lieu également dans toutes les ſections coniques, & dans une infinité d'autres courbes. Donc toutes ces courbes ſont irrectifiables ; car il eſt manifeſte que dans ces courbes, la tangente *AK* (*Fig.* 35), & la courbe *Aon*, ſont deux tous qui n'ont pas le même nombre infini de parties égales, comme dans les courbes rectifiables, attendu que ſi *AB*, *BC*, *CD*.... &c. ſont égaux, les arcs correſpondans *Ao*, *oo*, *oo*.... &c. ne ſont plus égaux entr'eux : & ſi au contraire *Ao*, *oo*, *oo*... &c, ſont ſuppoſés égaux, les parties *AB*, *BC*, *CD*... &c. de la tangente ne ſont plus égales. Donc les

deux tous, c'eſt-à-dire, la courbe *Aon*, & la tangente *AK*, ne pouvant, dans ces courbes, jamais contenir le même nombre infini, ni fini de parties égales, ne pourront par conſéquent, jamais être égaux entr'eux, quelques petites que puiſſent être les parties, dont ces deux tous ſeroient ſuppoſés compoſés.

Il eſt évident qu'afin qu'une courbe *Aon*, puiſſe être égale à une droite *AK*, il faut que ces deux lignes puiſſent être parcourues en même tems, par un point, par exemple, qui dans tous les momens auroit la même vîteſſe; car ce point décrivant les deux lignes, dans le même nombre de momens, & toujours avec la même vîteſſe, il eſt clair qu'en tems égaux, il parcourroit ſur les deux lignes des eſpaces qui ſeroient toujours égaux. Donc la droite *AK*, étant ſuppoſée égale à la courbe *Aon*; il eſt de toute évidence qu'un point mû avec une vîteſſe conſtante, parcourroit ces deux lignes dans le même nombre de momens, & que les parties *AB*, *Ao*, *BC*, *oo*...&c, des deux lignes, décrites en tems égal, ſeroient néceſſairement égales entr'elles. D'où ſuivroit cette proportion : *AK* : *AB* :: *Aon* : *Ao*.

Au contraire les courbes non ſuſceptibles de rectification ſont celles qui ne pourroient être décrites, dans le même nombre de momens qu'une ligne droite par un point ſuppoſé mû avec une vîteſſe conſtante; car il arrivera toujours, ou que les deux lignes ne ſeroient pas décrites dans le même nombre de momens, la vîteſſe du point étant ſuppoſée uniforme, d'où l'on ne pourroit conclure leur égalité, ou que la vîteſſe du point ne ſera point uniforme, ſi on les ſuppoſe parcourues dans le même nombre de momens, d'où il arrivera encore que l'égalité ne pourra en réſulter.

En effet, ſi le point parcourt, par exemple, la tangente *AF* (*Fig.* 37), au cercle *ANOP* d'un mouvement uniforme *AB*, *BD*, *DQ*... &c, dès-lors les arcs *AN*, *NO*, *OP*, qu'il devroit parcourir dans le même tems, afin que l'arc *AP*, fût décrit dans le même nombre de momens que la droite *ABDQF*; dès-lors, dis-je, ces arcs ne ſont plus égaux, & croîtroient en tems égal de *A*, en *P*; d'où il ſuit que dans l'hypothèſe du mouvement uniforme, l'arc *AP*, ne ſeroit plus parcouru dans le même nombre de momens que la droite *AF*, auquel on le

ſuppoſeroit égal. Ainſi cet arc & cette droite ne ſeroient plus égaux, contre la ſuppoſition, puiſqu'ils ne ſeroient point décrits en même tems par un mouvement ſuppoſé uniforme.

Si l'on ſuppoſe au contraire que les deux lignes, ſuppoſées égales ſoient parcourues par le point dans le même nombre de momens; dès-lors les arcs *AN*, *NO*, *OP*.... &c. décrits dans le même tems que les parties *AB*, *BD*.... &c. de la tangente, n'étant point égaux entr'eux, & allant en augmentant de *A* en *P*, la vîteſſe du point doit croître de *A*, en *P*, ce point parcourroit donc plus d'eſpace ſur la courbe *AP*, que ſur la droite *AQ*. Donc alors les deux lignes ne ſeroient plus égales.

Ainſi il eſt impoſſible qu'un point puiſſe décrire, par le même mouvement, une ligne droite égale à quelque partie que ce puiſſe être de la périphérie d'un cercle, d'une ellipſe, d'une parabole, d'une hyperbole.... &c. D'où il réſulte que ces courbes ne ſont point ſuſceptibles de rectification, puiſqu'aucune de leurs parties ne peut être parcourue par le même mouvement, par lequel une ligne droite ſeroit décrite; car ſi la vîteſſe eſt ſuppoſée

la

la même dans la deſcription des deux lignes, elles ne ſeront pas parcourues dans le même nombre de momens : donc l'une ſera toujours plus grande que l'autre, & ſi on les ſuppoſe parcourues dans le même nombre de momens, les vîteſſes avec leſquelles elles ſeront décrites, ſeront différentes, & par conſéquent encore les deux lignes ne pourront être égales.

Les ſeules courbes, ſuſceptibles d'être rectifiées, ſeront donc celles qu'on pourra diviſer en parties égales, ou proportionnelles à celles d'une ligne droite, & qui étant décrites en même tems que le ſeroit une ligne droite, le mouvement du point qui décriroit l'une & l'autre ligne ſeroit uniforme, & le même dans tous les inſtans, ou qui étant ſuppoſées décrites par un mouvement uniforme, & le même que celui qui ſeroit employé à décrire la ligne droite, les deux lignes ſeroient décrites dans le même nombre de momens.

Nommant *V*, la vîteſſe employée à décrire une ligne droite ; *T*, le tems employé à la deſcription de cette ligne, l'eſpace parcouru, ou la ligne décrite, ſera *VT*. Or viſiblement pour qu'une ligne courbe puiſſe être égale à une ligne droite *VT*, il faut qu'elle ſoit exprimée par *VT*,

c'eſt-à-dire, que la vîteſſe & le tems employés à décrire la courbe ſoient les mêmes que pour la ligne droite; mais dans une infinité de courbes, & ſpécialement dans les quatre ſections coniques, la vîteſſe du point étant ſuppoſé V, comme dans la ligne droite, le tems T, employé à décrire la droite quelconque, eſt différent du tems t, employé à la génération de la courbe; enſorte qu'on n'a point l'égalité $VT=vt$. D'où il ſuit que nulle ligne droite VT, ne peut être égale à un arc quelconque vt, de ces courbes.

Si au contraire le tems T, eſt le même pour la génération des deux lignes, les vîteſſes ſeront différentes. La ligne droite quelconque grande ou petite, étant TV, la courbe, ou tel arc quelconque que l'on voudroit ſuppoſer ſeroit Tv. Mais TV, & Tv, n'étant point égaux, il en réſulte encore que les deux lignes ne pourroient être égales, & en conſéquence qu'il n'exiſte, ni ne peut exiſter de lignes droites égales à tel arc de ces mêmes courbes que l'on voudroit ſuppoſer, ni qui puiſſe être en rapport fini avec ces mêmes arcs; d'où ſuit leur état d'irrectification.

Il ſuit auſſi de ce qu'on vient de dire, qu'un arc quelconque AN (*Fig.* 35), d'u-

ne courbe rectifiable pourra toujours être diviſé en raiſon donnée ; car ayant menée la tangente AK, égale à cet arc, & la droite KN, ſi la raiſon donnée eſt comme m, à n, diviſant la tangente AK, enſorte que, par exemple, AG, ſoit à GK, comme m, à n, tirant par le point G, la parallèle Go, à la droite Kn, l'arc quelconque An, ſera diviſé au point o, dans le rapport de m, à n; puiſqu'en effet l'arc Ao, eſt égal à la partie correſpondante AG, de la tangente, & que l'arc on, eſt égal à l'autre partie GK de cette même tangente.

On voit par-là que ſi le cercle pouvoit être rectifié, il ſeroit facile de diviſer l'un de ſes arcs quelconques Aon, dans la raiſon donnée de m, à n, & en conſéquence, que ſuppoſant la rectification du cercle, & une tangente AK, égale à l'un de ſes arcs quelconques An, il ſera toujours facile de diviſer cet arc dans la raiſon quelconque de m à n.

Et réciproquement ſi l'on pouvoit diviſer géométriquement un arc quelconque An, de cercle dans la raiſon donnée quelconque de m, à n, cet arc ſeroit toujours rectifiable ; car ayant mené la tangente indéfinie $A, B, C, D, E \ldots K$, &

diviſant enſuite l'arc donné *An*, en une infinité de parties égales *Ao*, *oo*.... &c. Il eſt clair que vers le point *A*, le petit arc *Ao*, ſeroit égal à la tangente *AB*, avec lequel il ſe confondroit; prenant enſuite ſur la tangente indéfinie *A*, *B*, *C*, *D*... *K*, des parties *BC*, *CD*, *DE*... &c. égales entr'elles, & à l'arc *Ao*, & menant par les points de diviſion de l'arc & de la tangente les droites *Bo*, *Co*, *Do*... &c; l'on auroit toujours *AB* = *Ao*, *BC* = *oo*, *CD* = *oo*.... *HK* = *on*. Si l'on ſuppoſe actuellement la corde *An*, diviſée dans le même nombre de parties égales. Il eſt clair que l'on auroit : *AB* : *BC* :: *Ab* : *bc*, *AC* : *CD* :: *Ac* : *cd*... &c. ce qui prouve que les petites droites *Bo*, *Co* : *Do*. *Eo*... &c. ſeroient parallèles entr'elles, puiſqu'elles diviſeroient la tangente & la corde en parties égales. Menant donc du point extrême *n*, de l'arc donné, la parallèle *nk*, à la petite droite *Bob*, cette droite couperoit la tangente en un point *K*, tel que l'arc de cercle *Aon*, ſeroit égal à la tangente *AK*; d'où il ſuivroit que les arcs *Ao*, *oo*, *oo*... &c. étant égaux, les parties correſpondantes de la tangente *AB*, *BC*, *CD*... &c. ſeroient égales, ainſi que les parties correſ-

pondantes *Ab*, *bc*, *cd*... &c. de la corde *An*, égalité qui ſubſiſteroit encore lorſque ces arcs, & ces parties de la tangente, & de la corde deviendroient finies, puiſque les arcs finis *Ao*, *oo*... &c. ne ſeroient que le réſultat d'une infinité de petits arcs égaux, & que les parties finies *AB*, *BC*... &c. *Ab*, *bc*... &c. de la tangente & de la corde ne ſeroient de même que le réſultat du même nombre infini de petites parties égales. Ainſi à des arcs finis égaux *Ao*, *oo*... &c. correſpondroient des parties *AB*, *BC*... &c. *Ab*, *bc*... &c. finies & égales de la tangente, & de la corde (ce que nous avons vu ne pouvoir être). Donc alors il ſeroit très-facile de déterminer une tangente finie *AK*, égale à l'arc donné *Aon*: car diviſant l'arc *Aon*, & la corde *An*, dans le même nombre fini de parties égales, par exemple, en huit parties, menant par les points de diviſion les droites *Bb*, *Cc*, *Dd*... &c. toutes ces lignes ſeroient parallèles entr'elles, par ce qui vient d'être dit: donc alors la dernière parallèle *KN*, termineroit au point *K*, la tangente *AK*, égale à l'arc donné *Aon*. La tangente *AH*, ſeroit égale à ſon arc correſpondant *Ao*, & les tangentes *AG*,

AF... &c. *AB*, égales aux arcs correſpondans *Ao*, *Ao*.... &c.

Ainſi c'eſt le même problême de rectifier le cercle, ou de couper l'un de ſes arcs quelconques en raiſon donnée; car ſi l'on pouvoit diviſer l'arc quelconque *Aon*, ſuivant une raiſon donnée, on pourroit diviſer cet arc en parties proportionnelles à celles de la corde *An*, & de la tangente *AK*, par les parallèles *Bb*, *Cc*, *Dd*.... *Kn*. D'où ſuivroit la rectification de cet arc, qui ſeroit égal à la tangente *AK*.

Les lignes *Bb*, *Cc*, *Dd*... *Kn*, étant ſuppoſées parallèles, l'on voit que ce qui empêche l'arc *Aon*, d'être égal à la tangente *AK*, c'eſt parce qu'alors les arcs *Ao*, *Ao*, *Ao*.. &c. ne ſont plus proportionnels aux parties correſpondantes de la corde & de la tangente; & il eſt ſi vrai que c'eſt en ce point ſeul que conſiſte toute la difficulté de la rectification, que lorſque cette difficulté eſt ſuppoſée vaincue, & que l'on ſuppoſe, comme dans la génération de la ſpirale, & de la quadratrice, la circonférence du cercle, ou quelqu'une de ſes parties, diviſées proportionnellement aux parties d'une ligne droite, qui, dans ces deux cas, eſt le

rayon du cercle, dès-lors le cercle devient rectifiable, dans l'hypothèse toutefois où ces deux courbes seroient considérées comme géométriques ; car la tangente à la spirale est égale à la circonférence du cercle générateur, & la base de la quadratrice est troisième proportionnelle au quart de circonférence, & au rayon. Mais qu'arrive-t-il? On retombe alors dans des courbes méchaniques, & transcendantes ; ensorte qu'on ne peut plus mener géométriquement une tangente à la spirale, ni déterminer géométriquement le point ultérieur de la quadratrice, & la difficulté de rectifier le cercle ne fait que changer de face, & se présenter sous une autre forme.

La propriété spéciale d'une courbe rectifiable, sera donc telle qu'étant supposée divisée en une suite finie d'arcs égaux *Ao*, *oo*, *oo*. . . &c. divisant la corde *An*, dans le même nombre fini de parties égales entr'elles, les lignes *ob*, *oc*, *od*. . . &c. menées par les points de division des deux lignes, seront toujours parallèles entr'elles ; & cette propriété ne se rencontrera dans les autres courbes, telles que le cercle, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole. . . &c, que dans le seul cas où le nom-

bre des ſections des deux lignes ſeroit ſuppoſé infini ; car dans tout nombre fini de ſections de l'arc *Aon*, & de la corde *An*, les lignes *ob*, *oc*, *od*..... &c, menées par les points de diviſion ne ſeront point parallèles dans ces courbes, ce qui fait qu'elles ne ſeront point rectifiables en termes finis, mais ſeulement par une ſuite infinie ; attendu que ce n'eſt que dans l'infini, c'eſt-à-dire, que dans le cas où l'arc *Aon*, & la corde *An*, ſeroient diviſés dans le même nombre infini de parties égales que les lignes *ob*, *oc*, *od*... &c, pourront être parallèles : voilà pourquoi le calcul n'aſſigne la rectification de ces courbes que dans l'infini, ce qui eſt équivalent à n'aſſigner aucune rectification, ou à réduire cette rectification purement imaginaire & chimérique, à zéro.

II. Remarque.

La quadratrice *AefgB*, de Dinoſtrate, imaginée d'abord tant pour rectifier le cercle, que pour diviſer un angle en raiſon donnée, eſt une courbe qui ſert merveilleuſement à démontrer d'une manière fort ſimple, & fort élégante, l'impoſſibilité de rectifier, & de quarrer le cer-

cle. On ſait que cette courbe ſuppoſe que le quart AD, de circonférence de cercle, & le rayon AC, ſeroient diviſés dans le même nombre infini de parties égales entr'elles, par les lignes Ch, Ci, Ck, CD & Le, Mf, Ng, CB. La rencontre de ces lignes, aux points e, f, g, B, forme autant de lieux à la quadratrice $Aefg B$. Or, on démontre, même avec la plus grande facilité, que la baſe CB, de la quadratrice ſeroit troiſième proportionnelle au quart de circonférence AD, & au rayon AC; car ſuppoſant le point N, infiniment près du point C, & élevant aux points B, D, les tangentes ou perpendiculaires Bg, Dk, l'on aura $Dk = \frac{AD}{\infty}$, & $Bg = NC = \frac{AC}{\infty}$; mais les triangles CDk, & CBg, étant ſemblables, donneront cette analogie : $Dk\left(\frac{AD}{\infty}\right) : CD :: NC\left(\frac{AC}{\infty}\right) : CB$, c'eſt-à-dire : $\frac{AD}{\infty} : CD :: \frac{AC}{\infty} : CB$; d'où on tirera $CB = \left.\frac{\frac{AC \times CD}{\infty}}{\frac{AD}{\infty}}\right\} = \frac{AC \times AC}{AD}$, & par conſéquent $AD = \frac{AC \times AC}{CB}$; c'eſt-à-dire, que le quart

AD, de circonférence, ſeroit égal au quarré du rayon *AC*, diviſé par la baſe *CB*, de la quadratrice. D'où, il ſuit que cette baſe étant ſuppoſée connue & déterminée, la quadrature & la rectification du cercle s'enſuivent néceſſairement; & réciproquement ſi l'on pouvoit quarrer, ou rectifier le cercle, par quelque méthode que ce fût, l'on détermineroit géométriquement la baſe *CB*, de la quadratrice, qui eſt toujours égale à $\frac{AC \times AC}{AD}$.

Or il réſulte, de la conſtruction même de la quadratrice, que ſa baſe *CB*, eſt indéterminable, puiſque pour déterminer cette baſe, il faudroit pouvoir déterminer le point ultérieur *B*, d'interſection de la dernière perpendiculaire *CB*, & du dernier rayon *CD*, ce qui eſt impoſſible, ces deux lignes ſe confondant, & par conſéquent ne ſe coupant plus, lorſque leur point d'interſection devroit ſe trouver ſur le rayon *CD*, comme, par exemple, dans un point *B*. Si donc on rectifioit le cercle, par une méthode quelconque, on pourroit aſſigner alors le point ultérieur *B*, de la quadratrice, & on détermineroit alors une choſe impoſſible; ſavoir, l'interſection dans un point *B*, de la dernière

perpendiculaire CB, & du dernier rayon CD, tandis que ces deux lignes ſe confondent dans la droite CBD, & ne ſe coupent plus, dès que le point ultérieur de la quadratrice ſeroit placé, comme il eſt évident qu'il devroit l'être, ſur quelque point B, du rayon CD. Par conſéquent la quadrature & la rectification du cercle ſuppoſent une choſe impoſſible, & même abſurde.

Une quantité, ſuppoſée indéterminable de ſa nature, n'exiſtant point, & ne pouvant exiſter, eſt néceſſairement égale à zéro, puiſque cette quantité ne différeroit en rien du néant. Le produit d'une telle quantité, par une quantité réelle, doit donc être égal à zéro. Si donc la baſe de la quadratrice eſt une pure chimère, qui ne ſauroit exiſter, il faut prouver qu'en effet étant multipliée par une quantité réelle, telle que ſeroit, par exemple, le rayon AC, du cercle, leur produit $AC \times CB = 0$.

Soient donc x, les abſciſſes AL, AM...&c. de la quadratrice; & y, les ordonnées correſpondantes Le, Mf.... &c. Nommant t, les tangentes Ah, Ao, Ap.... &c. correſpondantes à ces ordonnées & priſes ſur une perpendiculaire élevée ſur l'extrémité A, du rayon CA: l'on aura, à tous les points de la

courbe, l'analogie : $r : t :: r - x : y$. r, eſt ici le rayon AC; d'où réſultera l'équation $ry = tr - tx$; mais quand y, devient la baſe CB, de la quadratrice, x, devient le rayon AC; l'on a donc alors $x = r$; ſubſtituant donc r, à x, l'on aura, pour équation à la quadratrice, dans le cas où l'ordonnée $y = CB$; $ry = tr - tr = o$. D'où il ſuit que $r \times y$, ou $AC \times CB = o$. Mais r, ou AC, eſt une quantité réelle; donc y, ou CB, n'exiſtera point, & ſera une quantité égale à zéro, puiſqu'étant multipliée par r, le produit $ry = o$. Si donc la baſe CB, de la quadratrice eſt purement chimérique, & dès-là égale à zéro, ce qui eſt évident, il s'enſuit démonſtrativement que la rectification du cercle, & ſa quadrature même définie, ſont impoſſibles, puiſqu'on ne pourroit les ſuppoſer ſans que la détermination de la baſe CB, de la quadratrice ne s'enſuivît, & ſon égalité avec quelque quantité réelle CB, qui dès-lors ſeroit une portion finie, & déterminée du rayon AC, & par conſéquent, il ne ſeroit plus vrai alors que $ry = o$, puiſque y, ſeroit une partie déterminée & finie du rayon r, ou, pour mieux dire, le rectangle ry, auroit alors deux valeurs bien différentes; (ce qui ne

peut être) & qui ne différeroient entr'elles par l'infini; car d'une part $ry = o$ (dans le cas où $x = r$), & d'autre part $ry = AC \times CB$ qui ſeroit une quantité réelle, & un produit du rayon AC, par une partie finie & déterminée CB, de ce même rayon, ce qui ſeroit abſurde. La rectification du cercle, & ſa quadrature même définie ſont donc impoſſibles.

III. Remarque.

On ſe ſouvient d'avoir communiqué à M. Bézout, il y a quelques années, cette démonſtration contre la poſſibilité de rectifier & de quarrer le cercle. Ce Géomètre, en convenant qu'en effet il étoit impoſſible d'aſſigner géométriquement le point ultérieur B, de la quadratrice, oppoſa, à cette démonſtration, que l'on pouvoit toujours ſuppoſer que le dernier rayon CD, & la dernière perpendiculaire, ou ordonnée Ng, ſe coupoient dans un point, infiniment près du point B. Il eſt évident que cette objection ſe détruit par elle-même, & par les principes même ſur leſquels la méthode des infiniment-petits eſt appuyée; car dès qu'on ſuppoſe que le point d'interſection ſeroit infiniment

près de la ligne ou rayon CB, on peut le ſuppoſer placé, ſans erreur ſenſible, ſur le rayon CB lui-même. D'où il ſuivroit que ce point exiſteroit, & n'exiſteroit pas en même tems, ce qui eſt abſurde.

Quand le point d'interſection g, des deux lignes Ng, CK, eſt ſuppoſé infiniment près du dernier rayon CD, il eſt évident que l'angle ACg, approche alors infiniment de la valeur d'un angle droit; c'eſt-à-dire, de la valeur de l'angle ACD. Donc alors l'angle formé en g, devient infiniment petit à l'égard des angles formés en N, & en C, & peut être ſuppoſé nul, puiſqu'il ſeroit effectivement nul à leur égard: donc alors les deux lignes Ng, CD, ne ſe couperoient plus, pas même dans un point infiniment voiſin du rayon CD, comme le prétendoit M. Bézout; puiſque l'angle formé en g, ſeroit ou nul, ou pourroit toujours être conſidéré comme tel.

On voit, par ce dernier expoſé, combien M. Bézout abuſe de la méthode des infiniment-petits, & qu'il n'eſt pas étonnant que quelqu'un qui réduit cette méthode à ſa juſte valeur, en la conſidérant comme une ſimple hypothèſe, qui ne peut rien changer à la nature des cho-

ſes ; ne puiſſe ſe rencontrer avec lui. Ce défaut de concours avec les idées particulières à M. Bézout, eſt toujours qualifié par lui de *ſentimens*, *de propoſitions*... *&c. contraire à des vérités démontrées*, *ou aux ſentimens des Géomètres*.... *&c.*

Il eſt démontré, & M. Bézout en convient lui-même, que le point ultérieur B, de la quadratrice qui devroit ſe trouver ſur le dernier rayon CD, ne peut en même tems y être déterminé. D'où on conclut la non exiſtence de ce point. Or, que fait ici M. Bézout? Il met la Géométrie en contradiction avec elle-même, en telle ſorte que le point ultérieur de cette courbe exiſteroit, & n'exiſteroit pas en même tems. Ce point n'exiſteroit pas en le ſuppoſant placé ſur le dernier rayon CD, de la quadratrice qui eſt le lieu légitime où il devroit ſe trouver : mais il exiſteroit ſuivant M. Bézout, en le plaçant ſur un rayon ſuppoſé infiniment voiſin du dernier rayon CD, & qui au fond ſeroit toujours le même rayon CD, par l'hypothèſe même des infiniment-petits. Donc ce point exiſteroit, & n'exiſteroit pas en même tems, ce qui eſt abſurde. M. Bézout n'a pas fait attention que l'hypothèſe d'un, de deux, de trois... &c. rayons, ſuppo-

ſés infiniment près du dernier rayon CD, ne peut rien changer à la nature des choſes, ni faire exiſter ce qui n'exiſte point. Si le point ultérieur de la quadratrice ne peut exiſter ſur le dernier rayon CD, comme M. Bézout en convient, il doit convenir auſſi qu'il ne peut exiſter davantage ſur aucuns des rayons infiniment voiſins de ce dernier rayon, à cauſe que tous ces rayons peuvent toujours être conſidérés comme le même rayon CD, & que ce qui ſeroit dit & démontré de celui-ci, conviendroit également à tous les autres. Voilà la maniere légitime de ſe ſervir de l'hypothèſe des infiniment-petits. Si M. Bézout vouloit bien en faire le même uſage, & avoir des idées plus juſtes ſur cette matière, on s'accorderoit alors avec lui.

On peut encore prouver directement que la baſe de la quadratrice eſt égale à zéro. L'équation, à cette courbe, étant $ry = tr - tx$, comme il vient d'être dit, l'ordonnée $y = \frac{tr}{r} - \frac{tx}{r} = t - \frac{tx}{r}$. Mais quand l'ordonnée y, deviendroit la baſe de la quadratrice, l'abſciſſe x, deviendroit le rayon r, ou AC; ainſi dans ce cas $r = x$, l'on auroit donc $y = t - \frac{tx}{r}$

$= t$

$= t - t = o$. Donc la baſe, ou plus grande ordonnée de la quadratrice, eſt $y = o$; & voilà pourquoi le produit de cette baſe par le rayon r, eſt égal à zéro, comme il a été prouvé. L'on voit que cette réduction à zéro de la baſe de la quadratrice, ne marque autre chose, ſinon que cette baſe, ou plus grande ordonnée, ne peut être déterminée, comme les autres ordonnées Ng, Mf..... &c. de cette courbe, par l'interſection d'un rayon cg, & d'une perpendiculaire Ng, au rayon AC, attendu que ce rayon, & cette perpendiculaire, ſe confondent dans la droite CD, & par conſéquent, ne ſe coupent plus; leur point d'interſection devenant zéro, lorſque ce point devroit ſe trouver ſur le dernier rayon CD, comme dans quelque point B. Par conſéquent le point d'interſection du dernier rayon CD, & de la dernière perpendiculaire CB, étant nul, ou zéro, il eſt clair que la baſe CB, de la quadratrice ne peut être que nulle ou zéro, ainſi que toute ordonnée Ng, qui différeroit infiniment peu de cette même baſe. Ceci paroît répandre beaucoup de jour ſur la nature des ſuites infinies, dont on ſe ſert pour la quadrature, ou rectification du

cercle. On croit communément que ſi on avoit la ſomme de ces ſuites, l'on quarreroit & l'on rectifieroit le cercle ; & il paroît réſulter des obſervations que nous venons de faire, ſur la quadratrice, que la ſomme de la plupart du moins de ces ſuites devroit ſe réduire à zéro, bien loin de donner la quadrature, ou la rectification du cercle ; car on pourroit réduire ces ſuites à exprimer la baſe CB, de la quadratrice, dont la détermination donneroit & la quadrature, & la rectification du cercle. Suppoſons donc qu'en prenant une certaine quantité de termes de ces ſuites, & négligeant les autres, on déterminât toujours quelques fonctions des ordonnées Le, Mf, Ng... &c. de la quadratrice, leſquelles donneroient la quadrature ou la rectification du cercle, toujours plus rapprochée, à proportion qu'en prenant un plus grand nombre des termes de la ſuite, on détermineroit une ordonnée Ng, plus voiſine du dernier rayon CD de la quadratrice : cela poſé, il eſt évident que la ſomme de tous les termes de ces ſuites exprimeroit la baſe, ou plus grande ordonnée de la quadratrice, qui ſe confondroit dans le dernier rayon CD. Donc la ſomme entière de

ces ſuites ſeroit égale à zéro, bien loin de donner la rectification ou la quadrature du cercle, puiſque cette ſomme entière ſeroit, par l'hypothèſe, égale à la baſe de la quadratrice qui eſt égale à zéro.

L'on voit que ſi l'on prenoit pour baſe de la quadratrice, une ordonnée *Mf*, ou *Ng*... &c. qui ſeroit toujours plus voiſine du dernier rayon *CD*, on approcheroit de plus en plus de la rectification, & de la quadrature du cercle; mais l'on n'en doit pas conclure, comme l'on fait ordinairement, que ſi on en approchoit à l'infini, l'on obtiendroit enfin cette rectification & cette quadrature; attendu qu'alors l'ordonnée *Ng*, ſeroit ſur le dernier rayon *CD*, où elle ſe réduiroit à zéro, par le défaut d'interſection du dernier rayon avec la dernière perpendiculaire; car il importe d'obſerver qu'une quantité ſe réduit à zéro de différentes manières, & par un décroiſſement ſucceſſif & infini de cette même quantité, & par l'évanouiſſement de conditions auxquelles ſon exiſtence ſeroit attachée, & dont cette quantité dépendroit, comme ici l'interſection des rayons, & des perpendiculaires qui ſeule doit donner l'exiſtence à toutes les ordonnées *Le*, *Mf*, *Ng*... &c. de la courbe;

ſans en excepter la baſe, ou plus grande ordonnée de cette même courbe.

Si l'on déterminoit donc une ordonnée Ng, de la quadratrice, toujours plus près du dernier rayon CD, & qu'on prît cette ordonnée pour la baſe même de la quadratrice, cette ordonnée ſeroit à peu près troiſième proportionnelle entre le quart AD, de circonférence, & le rayon AC; ce qui donneroit à peu près $AD = \frac{AC \times AC}{Ng}$. Mais dans le cas où Ng, ſeroit ſur le dernier rayon CD, dès-lors $Ng = 0$, & l'on auroit : $AD = \frac{AC \times AC}{0}$ qui eſt une expreſſion toute ſemblable à celle de la quadrature de l'hyperbole, conſidérée entre ſes aſymptotes, dont l'équation étant $aa = xy$, la quadrature ſe réduit à : $\frac{a^2}{0}$: car ſuppoſant $a = AC$, l'on auroit, pour valeur du quart de circonférence, $AD = \frac{a^2}{0}$, & pour valeur de la quadrature de l'hyperbole la même quantité $\frac{a^2}{0}$, en obſervant toutefois que le zéro qui diviſe a^2, dans l'équation $AD = \frac{a^2}{0}$, exprime une ligne qui s'eſt évanouie, non point par une ſuite infinie de décroiſſemens, mais

par l'évanouiſſement d'un point d'interſection de deux lignes, néceſſaire à l'exiſtence de cette première ligne ; & que le zéro qui diviſe la même quantité a^2, dans le cas de la quadrature de l'hyperbole, n'exprime qu'un nombre évanoui, par lequel il faudroit diviſer a^2, pour avoir la quadrature de cette dernière courbe. Mais il s'enſuit toujours que la rectification, & par conſéquent la quadrature du cercle, & la quadrature de l'hyperbole ſe réduiſent au même problême, & au même degré d'impoſſibilité, exprimé par $\frac{a^2}{0}$; puiſque, pour le cercle, zéro exprime l'évanouiſſement d'une ligne qui diviſant le quarré a^2, du rayon, pouvoit ſeule donner pour quotient le quart de circonférence, & pour l'hyperbole l'évanouiſſement d'un nombre, par lequel ſeul on devoit diviſer le quarré a^2, pour avoir la quadrature de cette courbe. On voit donc que dans ces deux courbes, les quantités par leſquelles ſeules on pouvoit en obtenir la quadrature n'exiſtent point, puiſqu'elles s'y réduiſent à zéro.

En général tout problême qui finit par ſe réduire à une expreſſion de l'eſpece de celle-ci : $\frac{A}{0}$, marque toujours que la

choſe qu'on s'étoit propoſé de trouver eſt impoſſible, par l'évanouiſſement d'un nombre, d'une ligne, d'une quantité enfin, par laquelle ſeule la choſe demandée pouvoit exiſter & être obtenue, & dont zéro a pris la place. Or cette quantité ſe réduiſant à zéro, il eſt clair que la choſe que l'on cherchoit ne pourra exiſter, puiſque ſon exiſtence dépendoit de l'exiſtence de cette même quantité évanouie.

Par exemple, l'expreſſion de toutes les ſoutangentes, dans le cercle, étant : $\frac{2ax-2x^2}{a-2x}$. Dans le cas ou $x=\frac{1}{2}a$, dès-lors $2x=a$, & l'expreſſion de la ſoutangente CT ſe réduit à $\frac{2ax-2x^2}{a-2x}=\frac{2ax-2x^2}{0}$ $=\frac{\frac{1}{2}a^2}{0}$ qui eſt encore une expreſſion toute ſemblable à celles que nous venons de trouver pour la rectification du cercle, & pour la quadrature de l'hyperbole. Il eſt évident que, dans ce cas, la ſoutangente CT, ceſſe d'exiſter, parce qu'elle devient parallèle à la tangente DV, qui par conſéquent ne peut plus la couper dans aucun point, & lui donner l'être par cette interſection : car l'exiſtence de toutes les ſoutangentes dépend de leur interſection avec les tangentes correſpondantes, & cette

intersection dépend elle-même du rapport de l'abscisse x, avec le rayon $\frac{1}{2}a$ du cercle, ou de l'existence d'une ligne exprimée par $a-2x$. Quand il arrive donc que la ligne $a-2x$, se réduit à zéro, cette ligne n'existant plus, il est clair que la soutangente CT, qui recevoit l'être de cette même ligne, ne pourra exister davantage; ce qui est le sens de ces expressions dont se servent les Géomètres, lorsqu'ils disent que dans ce cas la soutangente CT, *devient infinie*; c'est-à-dire, cesse d'exister, & d'être déterminée, à la manière de toutes les autres soutangentes. Il est donc impossible, dans ce cas, de résoudre le problême qui auroit pour objet la détermination de la soutangente CT; ou pour mieux dire, ce problême se trouve tout résolu, en disant que cette ligne n'existe point, ou est infinie, indéterminable & égale à zéro, ce qu'on peut même prouver directement en cette manière. Si l'on nomme S, toutes les soutangentes du cercle, l'on aura $S=\frac{2ax-2x^2}{a-2x}$, & par conséquent, $a-2x=\frac{2ax-2x^2}{S}$; mais dans le cas où $x=\frac{1}{2}a$, l'équation sera $o=\frac{\frac{1}{2}a^2}{S}$. Donc alors, multipliant par la soutangen-

te S, le produit ſera : $o = \frac{1}{2}a^2$; mais puiſque $\frac{\frac{1}{2}a^2}{S} \times S = o$, c'eſt une néceſſité que $S = o$; c'eſt donc la même choſe de dire que la ſoutangente CT, devient infinie, ou qu'elle n'exiſte point, & qu'elle eſt réduite à zéro. Si l'on exprimoit donc cette ſoutangente par une ſuite infinie, il eſt clair qu'il ne ſeroit pas exact de dire que la ſomme de cette ſuite donneroit une quantité réelle qui ſeroit l'expreſſion de cette ligne ; puiſque cette ligne étant zéro, la ſomme des termes infinis de la ſuite, par laquelle elle ſeroit exprimée, ne pourroit ſe réduire qu'à zéro. Il ſuit de ces obſervations que l'on n'a pas lieu de regretter les méthodes qui pourroient conduire à la ſommation des ſuites relatives à la quadrature, & à la rectification du cercle, puiſqu'il paroît que la ſomme de ces ſuites devroit pour la plupart toujours finir par ſe réduire à zéro, comme celle par laquelle on exprimeroit la ſoutangente CT, du cercle, dans le cas ou $x = \frac{1}{2}a$. La quadrature, & la rectification du cercle n'étant pas plus poſſibles que la détermination de la ſoutangente CT, il s'enſuit qu'une quantité rectiligne A, à laquelle la ſuite infinie tendroit à égaler le cercle,

ou ſa circonférence, n'exiſtant point, ou étant zéro, la ſomme entière de la ſuite ſeroit toujours $S. = A = o$. Quand la quadrature, ou la rectification du cercle s'expriment ſeulement par voie d'approximation, alors la quantité rectiligne qu'on ſuppoſe égale au cercle, ou à ſa circonférence, eſt toujours réelle & ne ſe réduit point à zéro : par exemple, une ordonnée Ng, de la quadratrice, déterminée à une diſtance finie du dernier rayon CD, qu'on ſuppoſeroit égale à la baſe de cette courbe, & qui dès-là feroit obtenir une quadrature, & une rectification approchées du cercle, exiſtera toujours, puiſque cette ordonnée ſeroit déterminée par l'interſection du rayon Cgk : ainſi la ſuite qui exprimeroit cette ordonnée ne ſe réduiroit point à zéro. Mais on voit qu'il ne doit pas en être de même lorſque cette ordonnée devroit être déterminée ſur le rayon CD ; cette ligne ſe réduiſant alors à zéro, la ſuite par laquelle elle ſeroit exprimée ne pourroit que ſe réduire également à zéro. Ainſi le problême, touchant la quadrature & la rectification du cercle, ſe réduit à déterminer une quantité rectiligne Ng, le plus près qu'il ſeroit poſſible d'un lieu CD, de la vraie quadrature,

& rectification, & où par cela même la quantité rectiligne qui tendroit à être égale au cercle, ou à une partie déterminée quelconque de ſa circonférence, ſe réduiroit à zéro.

Obſervations ſur les propriétés ſpéciales des Courbes quarrables.

IL en eſt des quadratures des courbes comme des rectifications. Tout eſpace courbe qui pourra être diviſé en raiſon donnée pourra toujours être quarré, & au contraire tout eſpace courbe qui ne ſera pas ſuſceptible d'une telle diviſion ne ſera pas quarrable.

Soit ſuppoſée une courbe quarrable quelconque *ADHF* (*fig.* 39); cette courbe étant, par l'hypothèſe, ſuſceptible de quadrature, on pourra donc la ſuppoſer égale à un rectangle *ABGF*, formé du produit de ſon axe *AF*, par l'une de ſes ordonnées *ED*. Or, pour déterminer cette ordonnée *ED*, il eſt clair qu'il faut que l'eſpace courbe *ADHF*, ſoit ſuſceptible d'être diviſé, ſuivant une raiſon donnée, qui, dans le préſent exemple, ſera la rai-

ſon de la portion d'eſpace courbe AED, à la portion $EDHF$: le rapport entre ces deux eſpaces détermine néceſſairement l'ordonnée ED, qui étant multipliée par l'axe AF, donne un produit égal à tout l'eſpace courbe $ADHF$.

Et à raiſon de ce que la plus grande ordonnée FH, peut être priſe plus près ou plus loin du point A, de l'origine, & que dans tous les cas poſſibles, il s'agit toujours de déterminer l'ordonnée ED, qui fait trouver la quadrature de la courbe, relativement aux différens points de l'axe AF, l'on voit que la propriété ſpéciale des courbes quarrables, ſera de pouvoir être diviſée ſuivant une raiſon donnée. Ces courbes ayant cette propriété, & toute propriété d'une courbe étant renfermée dans ſon équation, il s'enſuit qu'une courbe quarrable ſera celle de l'équation de laquelle on pourra toujours déduire une ordonnée finie ED, qui étant multipliée par l'axe AF, donnera la quadrature de cette courbe. Et au contraire les courbes non quarrables ſeront celles de l'équation deſquelles on ne pourra déduire une telle ordonnée, attendu que ces courbes ne pourront être diviſées en raiſon donnée, & en conſéquence, que l'ordonnée

néceſſaire pour la quadrature, ne ſe trouvant point dans ces courbes, on ne pourra par conſéquent la déduire de leur équation.

Cette ordonnée eſt un élément commun à la courbe *ADHF*, & au rectangle *ABGF*, de manière que cet élément parcourt, le long de l'axe *AF*, le même eſpace; croiſſant dans la courbe de *E*, en *F*, & décroiſſant de la même quantité de *E*, en *A*, il eſt clair qu'il parcourt autant d'eſpace dans la courbe, par cet accroiſſement & ce décroiſſement égal, qu'il en parcourt dans le rectangle en demeurant toujours le même. Un élément qui croît & décroît de la même quantité, ne parcourt dans le même nombre de momens, ni plus ni moins d'eſpace que s'il étoit conſtant.

Ainſi l'ordonnée, dont la détermination donne la quadrature de la courbe, aura cette propriété particulière, de croître & décroître de la même quantité dans la courbe, enſorte que l'eſpace qu'elle y parcourra ſera toujours égal à celui qu'elle parcourroit, dans le même nombre de momens, en demeurant conſtante. Ceci nous fait comprendre comment une quantité variable peut décrire préciſément le

même eſpace qu'une quantité conſtante, c'eſt quand la variation par accroiſſement eſt égale à la variation par décroiſſement, alors la quantité conſtante eſt comme un terme moyen entre ces deux variations par excès, & par défaut, ce qui fait que la grandeur produite par la quantité variable eſt alors égale à la grandeur engendrée par la quantité conſtante. Il n'y a point d'autre manière de concevoir l'égalité entre deux grandeurs, dont l'une ſeroit le réſultat d'un élément variable, & l'autre le produit d'un élément conſtant.

Nous devons juger delà que ce n'eſt que dans quelques cas particuliers où un élément variable produira une grandeur égale à une grandeur dont les élémens ſeroient conſtans, puiſqu'il faut que l'élément variable croiſſe & décroiſſe préciſément de la même quantité, & à raiſon de ce qu'il y a un beaucoup plus grand nombre de cas, où le décroiſſement ſeroit plus grand ou plus petit que l'accroiſſement, il s'enſuit qu'il y aura beaucoup plus de courbes non quarrables que de quarrables.

Les ordonnées d'une courbe géométrique, toujours exprimées par ſon équation,

ſont finies par leur nature, puiſqu'elles ſont toutes d'eſpèce à pouvoir être déterminées avec la règle, & le compas.

S'il arrivoit donc qu'une courbe eût une ordonnée qu'on ne pût exprimer que par une ſuite infinie, ou, ce qui revient au même, qui fût égale à une ligne courbe non rectifiable, il eſt évident qu'une telle ordonnée, ne pouvant être déterminée avec la règle & le compas, ne pourroit, par conſéquent, être déduite de l'équation finie de la courbe.

Mais c'eſt là préciſément ce qui ſe rencontre dans les courbes non quarrables; l'ordonnée, dont la détermination en termes finis feroit trouver la quadrature de la courbe, y eſt toujours égale ou à une ligne courbe non rectifiable, ou à une ſuite infinie non ſommable.

Dans le cercle, par exemple, l'ordonnée ED, qui donneroit la quadrature du quart de cercle $ADHF$, y eſt égale à la moitié de l'arc ADH, ou à l'arc de 45 degrés. Or évidemment une telle ordonnée ne peut être déduite de l'équation finie du cercle, $y^2 = ax - x^2$, ou $y^2 = a^2 - x^2$. Pour avoir l'expreſſion de cette ordonnée qui eſt, $y = \sqrt{ax - x^2}$, ou

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$, on eſt obligé de réduire le radical en ſuite infinie, & de transformer par-là l'équation finie du cercle en équation infinie. Ainſi au point E, de l'axe, ou rayon AF, correſpondant à l'ordonnée ED, dont la détermination donneroit la quadrature du quart de cercle, l'équation finie du cercle y eſt transformée en équation infinie, & dès-là l'ordonnée ED, n'eſt plus ſuſceptible d'être exprimée en termes finis. D'où il ſuit que le cercle ne peut être ſuſceptible de quadrature finie; toute ordonnée finie par laquelle on voudroit multiplier le rayon AF, étant toujours plus grande, ou plus petite que l'ordonnée indéfinie ED, qui donneroit la quadrature ou quart de cercle $ADHF$.

M. Deſcartes a très-bien remarqué qu'il y avoit des quantités qui n'étoient ni finies, ni infinies, mais indéfinies; l'ordonnée ED, qui feroit trouver la quadrature du cercle, en eſt un exemple : cette ordonnée n'eſt point infinie, puiſqu'on peut en déterminer une plus grande; elle n'eſt point finie non plus, puiſque toute ordonnée finie ſera plus grande ou plus petite que l'ordonnée ED. Donc cette ordonnée ſera néceſſairement indéfinie.

Mais une quantité indéfinie étant, par

ſa nature, toujours plus grande ou plus petite qu'aucune quantité finie que ce ſoit, il s'enſuit qu'elle ne pourra être exprimée analytiquement que par une ſuite infinie; & cette ſuite ne pourra en même tems être ſommée, puiſque la quantité ne ſeroit plus indéfinie, ſi la ſuite par laquelle elle ſeroit exprimée étoit ſommable.

Ainſi une courbe non quarrable eſt celle qui n'a aucun élément, ou ordonnée finie ED, ſuſceptible de décroître de E en A, de la même quantité préciſément dont elle croîtroit de E en F; l'accroiſſement & le décroiſſement ne ſe trouvant jamais exactement égal dans cette courbe avec une ordonnée quelconque finie, qui parcourroit telles parties EA, & EF, de l'axe qu'on voudroit ſuppoſer, ou, ce qui revient au même, jamais dans une telle courbe, on ne pourra déterminer une ordonnée ED, qui donne le point D, de la courbe, où ſa partie concave DGH ſeroit égale à ſa partie convexe ADB; égalité qui eſt une ſuite néceſſaire de la détermination de l'ordonnée ED, qui feroit trouver un rectangle $ABFG$, égal à l'eſpace courbe $ADHF$, puiſque de-là réſulte l'égalité de DGH, avec ABD.

Nommant

Nommant x, les abſciſſes AE, AF... &c. d'une courbe quelconque; y, les ordonnées correſpondantes ED, FH... &c. Il ſuit de ce qui vient d'être dit, qu'un eſpace courbe $ADHF$, pourra toujours être exprimé par le produit d'une abſciſſe $AF(x)$, par une ordonnée ED (y); c'eſt-à-dire, par xy. Différentiant ce rectangle, l'on aura: $x\,dy+y\,dx$. Mais dans le cas où l'ordonnée ED, devient conſtante, comme elle l'eſt dans le rectangle $ABFG$, ſuppoſé égal à l'eſpace courbe $ADHF$, ſa différentielle dy, devient zéro. Donc alors la différentielle $x\,dy+y\,dx$, eſt réduite à $y\,dx$, dont l'intégrale ſera: $S.y\,dx$. Mais, y, étant conſtante dans le rectangle, $S.y\,dx=xy$, & étant variable dans la courbe, l'on voit que le problême des quadratures s'y réduit à intégrer, $y\,dx$, en telle ſorte que l'intégrale ſoit la même, ſoit que, y, ſoit une quantité conſtante, ou une quantité variable; & que par conſéquent toute courbe quarrable eſt celle qui contient une ordonnée ED, propre à parcourir le même eſpace le long de l'axe AF, tant dans le cas où elle ſera conſidérée comme conſtante, que dans celui où elle ſeroit ſuppoſée variable; & les courbes non quarrables

ſeront celles qui ne contiendront point une telle ordonnée.

Si l'on nomme P, l'élément $ED = KM = PQ$, qui donne la quadrature de la courbe quelconque ADH; x, & y, les coordonnées de cette même courbe; l'on aura $MN = Y - P$, & $OQ = P - Y$, pour élémens des parties GHD, DBA, de cette courbe. Donc $S.ydx - S.pdx = S.pdx - S.ydx$; donc : $S.2ydx = S.2pdx = 2px$. Donc : $S.ydx = px$. Donc : $\frac{1}{x} \times S.ydx = P$. Ainſi l'expreſſion de l'ordonnée ED, qui, étant déterminée, feroit trouver la quadrature de la courbe quelconque ADH, ſera : $P = \frac{1}{x} \times S.ydx$.

Dans le cas où cette courbe ſeroit, par exemple, la parabole quarrée dont le paramètre ſeroit a, l'on auroit $P = \frac{1}{x} \times S.ydx = \frac{1}{x} \times S.a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{x} \times \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}y$; c'eſt-à-dire, que, dans ce cas, l'ordonnée $ED = P$, eſt toujours les deux tiers de l'ordonnée $FH = y$, conſidérée comme baſe, ou plus grande ordonnée de l'arc ADH, de la courbe... &c.

Obſervations ſur les points de différens ordres, par leſquels les lignes courbes peuvent être conçues formées, & ſur la maniere de les exprimer.

SI l'on a une grandeur conſtante a, élevée à une puiſſance quelconque m; cette grandeur étant a^m, ſon élément ſera toujours a^{m-1}, quel que puiſſe être ſuppoſé l'expoſant m, de cette grandeur, un nombre entier, ou rompu, poſitif, ou négatif. Ce qui eſt évident, puiſque l'élément de toute grandeur eſt toujours cette grandeur même, dont l'expoſant ſeroit diminué d'une unité. Ainſi la grandeur étant a^m, ſon élément, dans tous les cas, ſera a^{m-1}.

Si $m=4$, la grandeur ſera a^4, & ſon élément $a^{4-1}=a^3$.

Si $m=3$, la grandeur ſera a^3, & ſon élément $a^{3-1}=a^2$.

Si $m=2$, la grandeur ſera a^2, & ſon élément $a^{2-1}=a^1$.... &c.

Ainſi le cube ſera l'élément de la quatrième puiſſance; le quarré, l'élément du cube; la ligne, l'élément du quarré.

Donc l'élément de la ligne a^1, ſera le point ou $a^{1-1} = a^0 = \frac{a}{a} = 1$; par conſéquent, l'expreſſion du point, élément de la ligne a ſera a^0 ; car faiſant $m = 1$, la grandeur ſera $a^m = a^1$, & l'élément $a^{1-1} = a^0$.

Mais la grandeur devant être conſidérée dans tous les divers états d'accroiſſemens, ou de décroiſſemens, dont elle peut être ſuſceptible, il s'enſuit que m, pourra exprimer tous les nombres poſſibles, poſitifs, ou négatifs, entiers, ou rompus. Si donc $m = 0$ la grandeur a^m ſera a^0, & l'élément $a^{0-1} = a^{-1}$. Mais ſi a^0 eſt le point du premier ordre, élément de la ligne a, il eſt clair que a^{-1} ſera le point du ſecond ordre, ou l'élément du point du premier ordre a^0, puiſqu'alors $m = -1$, & que la grandeur eſt $a^m = a^{-1}$, & par conſéquent, ſon élément $a^{m-1} = a^{-1-1} = a^{-2} \ldots$ &c, & comme il en ſeroit toujours de même à l'infini, qu'en ſuppoſant $m = a, -1, -2, -3, -4$, l'élément de la grandeur ſeroit toujours a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, $a^{-5} \ldots$ &c, & enfin $a^{-\infty}$; il s'enſuit qu'il faudra concevoir des points de différens ordres à l'infini, a^0, a^{-1}, a^{-2}, $a^{-3} \ldots a^{-\infty}$, tous élémens, ou principes générateurs les uns des autres.

Delà il ſuit que le point de l'ordre infini $a^{-\infty}$, n'a point d'élément ou de principe générateur, puiſque ſon élément ſeroit $a^{-\infty-1}=a^{-\infty}$; le propre de l'ordre infini ſera donc d'exiſter par lui-même, & d'être ſans principe.

Si m eſt ſuppoſé égal à un nombre rompu, par exemple, à $\frac{3}{5}$, ſon élément ſera $a^{\frac{3}{5}-1}=a^{-\frac{2}{5}}$; ſi $m=\frac{5}{3}$, la grandeur étant $a^{\frac{5}{3}}$, ſon élément ſera : $a^{\frac{5}{3}-1}=a^{\frac{2}{3}}$; ſi $m=\frac{5}{2}$, l'élément de la grandeur $a^{\frac{5}{2}}$, ſera $a^{\frac{5}{2}-1}=a^{\frac{3}{2}}$; ſi $m=\frac{7}{2}$, la grandeur étant $a^{\frac{7}{2}}$, ſon élément ſera $a^{\frac{7}{2}-1}=a^{\frac{5}{2}}$. . . . &c.

Par la raiſon contraire l'élément d'une grandeur conſtante étant en général a^n, la grandeur ſera a^{n+1}, quel que puiſſe être le nombre n, un nombre entier, ou rompu, poſitif, ou négatif.

Si donc $n=1, 2, 3, 4$. . . &c. l'élément étant a^1, a^2, a^3, a^4. . . &c, la grandeur ſera $a^{1+1}, a^{2+1}, a^{3+1}, a^{4+1}$. . . &c.

Si $n=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}$. . . &c. l'élément de la grandeur étant $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{3}{5}}$. . . &c. la grandeur ſera : $a^{\frac{1}{2}+1}=a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}+1}=a^{\frac{4}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}+1}=a^{\frac{5}{4}}$, $a^{\frac{3}{5}+1}=a^{\frac{8}{5}}$. . . &c.

Ces principes reviennent donc encore à ceux du calcul différentiel, & intégral, à l'exception seulement qu'ils ne s'appliquent ici qu'aux grandeurs constantes ; c'est-à-dire, qu'aux grandeurs dont les élémens ne croissent, ni ne décroissent, & qui sont toujours les mêmes ; ce qui fait que l'élément ne doit pas être multiplié par l'exposant de la grandeur, comme dans le calcul différentiel, ni la grandeur être divisée par son exposant, comme dans le calcul intégral. Ainsi a^n, étant supposé l'élément d'une grandeur constante, la grandeur sera a^{n+1} ; mais si on suppose que a^n, soit l'élément d'une grandeur variable, la grandeur est alors $\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

De même a^n étant supposée une grandeur constante, son élément sera a^{n-1} ; mais si c'est une grandeur variable son élément sera $n \cdot a^{n-1}$.

D'où l'on voit que quand la grandeur est variable, elle décroît par delà ce qu'elle auroit fait si elle avoit été constante, en raison de l'exposant auquel elle s'éleve, & qu'au contraire son élément croît, par delà ce qu'il auroit fait s'il avoit été constant, en raison de ce même exposant

de la grandeur, conformément à l'esprit de notre théorême fondamental.

Nous remarquerons ici un avantage de la grandeur constante sur la grandeur variable, quand l'exposant de la grandeur est supposé égal à zéro; la grandeur étant alors a^0, son élément est a^{-1}. Ainsi a^{-1}, est le principe générateur, ou l'élément de la grandeur constante a^0. Mais si la grandeur est supposée variable, elle cesse alors d'avoir d'élément, ou de principe générateur. Et en effet la différentielle de x^0, est $0 \times x^{-1} dx = 0$. Mais dès que la grandeur x^0, n'a point d'élément, ou de différentielle, la différentielle $x^{-1} dx$, n'aura point d'intégrale, puisque son intégrale seroit : $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$.

Et ce qui fait que x^0, n'a point de différentielle, c'est qu'en effet x^0, étant égal à l'unité, est une quantité constante, dont la différentielle est zéro. Ainsi x^0, n'aura d'élément, ou de principe générateur, qu'autant qu'il seroit considéré comme une quantité constante; par conséquent la quantité constante a ici un avantage sur la quantité variable, puisqu'étant supposée a^0, son élément sera a^{-1}, tandis que la variable x^0, n'auroit plus

d'élément ou de principe générateur.

Si nous appliquons actuellement aux lignes courbes, l'idée des différens ordres de points, dont il vient d'être parlé, il ſera facile de concevoir en quoi conſiſte préciſément l'état de rectification de ces lignes, & leur etat d'irrectification.

On démontre que toute tangente BD, à une courbe quelconque NAM, ne touche cette courbe qu'en un ſeul point; mais ſi l'on nomme a, la tangente AD (*Fig.* 40), les différens ordres de points de cette droite ſeront a^0, a^{-1}, a^{-2}.... $a^{-\infty}$. Obſervons que la courbe & la tangente ne peuvent avoir de commun que le point AC, par lequel la tangente touche la courbe, & que par conſéquent, ce point ſeul pourra être leur meſure commune. Obſervons encore que dans l'hypothèſe des courbes poligones d'une infinité de côtés, le point, & le petit côté AC, de la courbe, ne peuvent être qu'une même choſe; puiſqu'alors AC, ſeroit tout à la fois le petit côté AC, & le point par lequel la tangente AD, toucheroit la courbe NAM. Ainſi la meſure commune à ces deux lignes ſera néceſſairement un point ou petit côté AC, de quelqu'ordre fini a^0, a^{-1}, a^{-2} .., &c, ou de l'ordre infini $a^{-\infty}$.

Si ce point, que je nommerai a^{-n}, eſt renfermé un nombre infini p, de fois dans l'arc AM, de la courbe, & un nombre infini q, de fois dans la tangente AD, les deux lignes ſeront entr'elles comme ∞p, à ∞q; c'eſt-à-dire, comme $\frac{\infty p}{\infty q} = \frac{p}{q}$. Ainſi, dans ce cas, les deux lignes ſeront en rapport fini, & par conſéquent, la courbe ſera rectifiable.

Il eſt évident que ce cas doit avoir lieu toutes les fois que le point, ou petit côté AC de la courbe, ſera de quelqu'ordre fini a^{0}, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}... &c. Suppoſons que ce petit côté, ou point ſoit de l'ordre, par exemple, a^{-3}, le multipliant quatre fois par la conſtante a, l'on auroit $a^{-3+4} = a^{1}$, qui exprimeroit tout à la fois une droite AD, & un arc AM, de la courbe. Ainſi, dans ce cas, le point de l'ordre fini a^{-3}, ſeroit ſuſceptible d'être élevé à l'ordre de la ligne a^{1}, & par conſéquent la courbe ſeroit ſuſceptible d'être rectifiée.

Mais ſi le point AC, eſt de l'ordre infini $a^{-\infty}$, il eſt évident qu'alors la courbe ne pourra être rectifiée, à cauſe que pour élever le point $a^{-\infty}$, de l'ordre infini, à l'ordre de la ligne a^{1}, il faudroit le multiplier une infinité de fois, plus un, par la

conſtante a, ce qui donneroit $a^{-\infty+\infty+1}=a^{1}$; & attendu qu'il eſt impoſſible d'élever une quantité, a, à un degré infini, & même ici au degré plus qu'infini $\infty+1$, il s'enſuit que toute courbe qui n'aura de commun avec ſa tangente qu'un point, ou petit côté AC, de l'ordre infini $a^{-\infty}$, ne pourra jamais être rectifiée.

Les courbes rectifiables ſeront donc celles qui ſeroient vraiment poligones d'une infinité de côtés, infiniment petits, qui ſeroient touchées, par une tangente AD, dans quelque point ou petit côté AC, de quelqu'ordre fini a^{0}, a^{-1}, a^{-2}.... &c, ce petit côté étant viſiblement la meſure commune à la courbe, & à la tangente.

Et les courbes irrectifiables, celles qui ne ſeroient point en rigueur des poligones, qui n'étant touchées par une tangente AD, que dans un point, ou petit côté AC, d'un ordre infini $a^{-\infty}$, n'auroient qu'un tel point pour meſure commune avec la tangente AD.

Il ſuit de ces principes qu'on ne peut concevoir comment une courbe peut devenir effectivement poligone, qu'autant que la courbure de ſes arcs ſeroit toujours moindre à proportion qu'ils ſeroient ſuppoſés plus petits; c'eſt-à-dire, qu'autant

que la courbure de ſes arcs ſeroit épuiſable à l'infini, puiſqu'en effet, tous ſes arcs doivent finir par devenir rectilignes, étant diviſés, & ſubdiviſés à l'infini, dès qu'on la ſuppoſe poligone.

La propriété ſpéciale des courbes rectifiables ſera donc d'avoir des arcs dont le degré de courbure diminueroit toujours à proportion qu'ils ſeroient diviſés dans un plus grand nombre de parties ; enſorte que la courbure doit diſparoître, & par conſéquent, les arcs finiront par devenir rectilignes, quand ils ſeroient infiniment petits.

Et par la raiſon contraire, les courbes non rectifiables ſeront celles dont la courbure ſeroit inépuiſable à l'infini, & dont le degré de courbure ſeroit ou conſtant, ou non ſuſceptible de diminuer à l'infini, à meſure que ces arcs ſeroient diviſés en un plus grand nombre de parties. Ces courbes ne ſeront donc point en rigueur des poligones, puiſque leur degré de courbure étant ou conſtant, ou non ſuſceptible de diminuer à l'infini, un très-petit arc de ces courbes ſeroit encore courbe, & non transformé en ligne droite. L'élément réel de ces courbes ſera donc en rigueur, non une ligne droite AC, ou point de

quelqu'ordre fini a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c, mais un petit arc.

Si nous appliquons actuellement cette théorie, par exemple, au cercle, & à l'ellipſe, il ne ſera pas difficile d'en conclure leur état d'irrectification.

En effet que ces deux courbes ſoient ſuppoſées décrites par le moyen d'un fil tendu CD, AfF, mû circulairement autour du ſeul centre C, dans le cas de la génération du cercle (*Fig.* 41), & autour des deux centres f, F (*Fig.* 42), dans le cas de la génération de l'ellipſe. Il eſt manifeſte qu'on ne peut concevoir, qu'un ſtyle, placé en D, & en A, & tenant toujours tendus les fils attachés fixement en C, & en f, F, puiſſe dans ſon mouvement jamais ſuivre, même pendant le plus petit inſtant poſſible, la direction des tangentes DN, AO; & delà il ſuit que les points D, A, communs aux courbes, & aux tangentes DN, AO, ne pourront être des points, ou petits côtés rectilignes, d'aucun ordre fini, a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c, mais ſeulement des points de l'ordre infini $a^{-\infty}$, & que par conſéquent ces deux courbes ſeront irrectifiables.

Il n'eſt pas moins manifeſte que l'élément réel de ces courbes n'eſt, ni ne peut

être qu'un petit arc DO, ou AB, décrit dans un petit tems $\dot{t}$, & non point une petite droite d'aucun ordre fini a^0, a^{-1}, a^{-2}... &c. qu'il eſt impoſſible que le ſtyle eût pu décrire pendant ce même tems $\dot{t}$, infiniment court. Donc la courbure de ces deux courbes eſt inépuiſable à l'infini, dans tout leur circuit. Cette courbure eſt conſtante dans le cercle, & variable dans l'ellipſe. Un petit arc, pris dans un même cercle, eſt auſſi courbe qu'un grand arc. On n'a donc en rigueur pas plus de droit de ſuppoſer la rectification d'un petit arc que celle d'un grand arc, ſoit dans le cercle, ſoit dans l'ellipſe.

Quand il arrive donc que le calcul intégral n'aſſigne la rectification du cercle, de l'ellipſe, & d'une infinité d'autres courbes que dans l'infini, c'eſt parce que dans ce calcul on part de l'hypothèſe que toutes les courbes ſont poligones, ce qui n'eſt rigoureuſement vrai que de quelques unes. Or, dans les courbes qui ne ſont point en rigueur poligones, qui n'ont de commun avec leurs tangentes que des points, ou petits côtés de l'ordre infini $a^{-\infty}$, il eſt évident que le calcul ſe conforme alors à la nature de ces courbes,

en n'assignant leur rectification que dans l'infini, c'est-à-dire, qu'au point de l'ordre infini $a^{-\infty}$.

Et au contraire quand ce calcul détermine une ligne droite égale à une ligne courbe, ou, ce qui revient au même, quand il assigne la rectification de certaines courbes dans le fini, il se conforme encore à la nature de ces sortes de courbes qui étant véritablement poligones, ont un point, ou petit côté de quelqu'ordre fini a^{0}, a^{-1}, a^{-2}... &c. commun avec leurs tangentes; ensorte que ce point, ou petit côté quelconque a^{-n}, étant contenu, par exemple, un nombre p, infini de fois dans un arc fini de ces mêmes courbes, & un nombre q, infini de fois dans leur tangente, le rapport de cet arc quelconque avec la tangente sera : $\frac{\infty p}{\infty q} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire, que le rapport deviendra fini.

Si l'on a une courbe quelconque ABQ, son axe AP (*Fig.* 43), sur lequel on prendra les coupées AC, AD, que l'on nommera x; & y, les ordonnées CB; supposant l'ordonnée DN, infiniment près de l'ordonnée CB, & abaissant la perpendiculaire BO, l'on aura toujours un petit triangle rectangle BON, dont le point, ou

petit côté BN, de la courbe, ſera l'hypothénuſe. Mais puiſque $AC=x$, donc $CD=dx$; & puiſque $CB=DO=y$, l'on aura $ON=dy$. Donc l'expreſſion du point, ou petit côté BN, d'une courbe quelconque, conſidérée comme poligone, ſera toujours $BN=\sqrt{\overline{BO}^2+\overline{ON}^2}=\sqrt{dx^2+dy^2}$; c'eſt là l'expreſſion ou formule générale de la rectification des courbes que fournit le calcul différentiel.

Suppoſons actuellement un arc quelconque fini AB, de cette courbe; BN ſera ſon point générateur, ou petit côté rectiligne, commun à la courbe, & à la tangente NM, que je nommerai a. Or le point, ou principe générateur de la ligne a, étant a^0, ſuivant ce qui a été dit, l'on aura: $a^0=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Donc $\infty a^0=\infty\sqrt{dx^2+dy^2}$. Mais $\infty a^0=a^1$; donc $a^1=\infty\sqrt{dx^2+dy^2}$. Or dans toutes les courbes vraiment poligones l'équation $a^1=\infty\sqrt{dx^2+dy^2}$, eſt juſte, puiſque BN, eſt néceſſairement un élément commun à la courbe, & à la tangente NM, & dès-là cette courbe eſt rectifiable, & en différentiant ſon équation, & faiſant les ſubſtitutions convenables, dans la formule

$\sqrt{dx^2+dy^2}$; cette formule doit toujours finir par ſe réduire à une expreſſion intégrable en termes finis, puiſqu'en effet $S. \sqrt{dx^2=dy^2=a}$.

Mais dans le cas où la courbe ne ſeroit point en rigueur poligone, alors BN, ne ſeroit point un élément commun à la courbe, & à la tangente NM; cet élément commun ſeroit le point de l'ordre infini $a^{-\infty}$; l'on n'auroit donc plus l'égalité $a^0=\sqrt{dx^2+dy^2}$, ni par conſéquent cette autre égalité $a^1=\infty \sqrt{dx^2+dy^2}=S. \sqrt{dx^2+dy^2}$; & dès-là la courbe ne ſeroit plus rectifiable en termes finis, puiſqu'il ne pourroit exiſter aucune droite a^1 égale à $S.\sqrt{dx^2+dy^2}$; la rectification de la courbe, dans ce cas, ne pourroit s'obtenir que par la voie d'une ſuite infinie, à cauſe préciſément qu'elle ne ſeroit exacte qu'au point de l'ordre infini $a^{-\infty}$; car ce n'eſt qu'à ce point ſeul que l'on pourroit avoir l'égalité $a^{-\infty}=\sqrt{BO^2+ON^2}$; mais cette égalité exigeroit de différentier une infinité de fois les variables x, & y, afin d'avoir les différentielles BO, ON, du même ordre préciſément que le point de l'ordre infini $a^{-\infty}$, élément commun à

la

la courbe & à la droite, ou tangente *NM*. Ainſi viſiblement de telles courbes ſeront toujours irrectifiables en termes finis. Quand il arrive donc que la quadrature, ou la rectification d'une courbe ne ſont aſſignées que dans l'infini, c'eſt la preuve certaine que l'élément commun à un eſpace courbe, & à un eſpace rectiligne, ou à la ligne courbe, & à une ligne droite quelconque, ne peut ſe trouver qu'après avoir différencié une infinité de fois les variables x, & y; c'eſt-à-dire, les coordonnées de la courbe; & dès-là l'on voit avec la dernière évidence que de telles courbes ne peuvent être ni quarrées, ni rectifiées en termes finis, puiſque leur quadrature, & leur rectification exactes ne pourroient s'obtenir qu'après avoir différencié une infinité de fois les variables x, & y, de ces courbes; car la ſeconde différentiation donneroit une quadrature, & une rectification plus rapprochées de la vérité que la première, la troiſieme plus que la ſeconde, la quatrieme plus que la troiſieme, & ainſi de ſuite. Donc, à la fin d'une infinité de différentiations des variables x, & y, on auroit approché à l'infini de la vraie quadrature, & rectification de la courbe; & par conſéquent,

ce n'eſt qu'à ce point ſeul que cette quadrature, & cette rectification exactes ſeroient obtenues, puiſqu'il n'exiſteroit qu'à ce point ſeul un élément commun à la quantité rectiligne, & curviligne. Donc, dans ce cas, la quadrature & la rectification de la courbe en termes finis ſera impoſſible, puiſque ce cas ſuppoſe que l'on auroit fait une choſe impoſſible ; ſavoir, d'avoir différentié une infinité de fois les variables x, & y.

Et en effet, en différentiant une infinité de fois les variables x, & y, on auroit pour expreſſion $d^{\infty}x$, $d^{\infty}y$, qui reviendroit aux expreſſions des points, ou à peu près, $x^{-\infty}$, $y^{-\infty}$. Ainſi les petites lignes Bo, oN, différentiées une infinité de fois, ou diviſées une infinité de fois par l'infini donneroient $d^{\infty}x$, $d^{\infty}y$, ou à peu près, $x^{-\infty}$, $y^{-\infty}$. Dans les courbes non ſuſceptibles de rectification, l'élément commun à la courbe AN, & à la tangente NM, ſera donc : $a^{-\infty} = \sqrt{x^{-2\infty} + y^{-2\infty}}$ qui démontre par le fait, que la rectification, dans ce cas, s'éleve à un ordre infini de grandeur, & qu'il eſt par conſéquent impoſſible de l'obtenir.

Soit, en effet, l'équation $y^2 = ax$, à

la parabole, on en déduira l'égalité $x = \frac{y^2}{a}$. Donc $x^\infty = \frac{y^{1\infty}}{a^\infty}$. Donc encore $x^{2\infty} = \frac{y^{4\infty}}{a^{2\infty}}$. Donc $\frac{1}{x^{2\infty}} = \frac{1}{\frac{y^{4\infty}}{a^{2\infty}}} = \frac{a^{2\infty}}{y^{4\infty}}$. Donc encore $x^{-2\infty} = a^{2\infty} y^{-4\infty}$. Subſtituant, dans la formule ci-deſſus, à la place de $x^{-2\infty}$, ſa valeur $a^{2\infty} y^{-4\infty}$, l'on aura $\sqrt{a^{2\infty} y^{-4\infty} + y^{-2\infty}}$ pour expreſſion du point ou petit côté *BN*, de la parabole, commun à cette courbe, & à la tangente *NM*; ce qui démontre que quand la courbe n'a de commun avec ſa tangente qu'un point de l'ordre infini, elle eſt néceſſairement irrectifiable, puiſqu'il entre dans l'expreſſion de ce point, ou petit côté, des grandeurs élevées, ou abaiſſées à un ordre infini, comme il réſulte, en effet, d'une foule de ſuites que les Géomètres ont trouvées pour quarrer ou rectifier le cercle, l'ellipſe, l'hyperbole & une infinité d'autres courbes, par leſquelles on voit évidemment que les grandeurs qui compoſent les termes de ces ſuites s'élevent, ou s'abaiſſent à des degrés ſucceſſivement plus grands, ou moindres à l'infini, parce que, dans ces différens cas, la quantité rectiligne, & la quantité cur-

viligne n'ont de commun qu'un élément d'un ordre infini.

Dès qu'une ligne courbe ABN, & une droite quelconque NM, n'auront d'autre meſure commune qu'un point de l'ordre infini $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}}$, il eſt manifeſte que le rapport entre ces deux lignes ne pourroit qu'être infini, & ne s'exprimer par conſéquent que par une infinité de termes; car le nombre des termes qui exprimeroient le rapport de deux quantités doit toujours croître à proportion que la meſure de ce rapport ſeroit plus petite. Or la meſure du rapport étant ici la quantité $\frac{1}{a^{\infty}}$, abaiſſée à un ordre infini, il eſt évident que ce rapport ne pourroit s'exprimer que par une infinité de termes; puiſqu'il faudroit diviſer l'unité par la quantité a, élevée à un expoſant infini, & que par conſéquent ce rapport ſeroit infini.

On voit clairement que ſi la meſure du rapport étoit un point, ou petit côté de quelqu'ordre fini a°, a^{-1}, a^{-2}... &c. ce rapport ſeroit fini, puiſqu'il ne faudroit pas une infinité de termes pour l'exprimer; l'expoſant de cette meſure étant

toujours un nombre fini : mais quand l'expoſant de la meſure commune repréſenteroit un nombre infini, dès-lors le rapport entre la courbe, & la ligne droite ne peut qu'être infini, & par conſéquent ne pourroit s'exprimer que par une infinité de termes, c'eſt-à-dire, par une ſuite infinie.

Ainſi toute la théorie de la quadrature, & de la rectification des courbes ſe réduit actuellement à deux mots. Une meſure commune à la quantité curviligne, & à la quantité rectiligne ſera néceſſairement employée pour meſurer leur rapport, & cette meſure aura en même tems un expoſant. Quand cet expoſant ſera fini, la courbe ſera ſuſceptible de quadrature, ou de rectification en termes finis; & quand l'expoſant de cette meſure ſera infini, la courbe ne ſera ſuſceptible de quadrature ou de rectification que par une ſuite infinie; car il eſt évident que le rapport entre la quantité curviligne, & la quantité rectiligne doit être préciſément de même nature que la meſure qui ſeroit employée pour le déterminer. Ce rapport ſera donc fini quand la meſure ſera finie, & infini quand elle ſera infinie.

Tel eſt le réſultat du Mémoire lû par

l'Auteur à l'Académie des Sciences, ſur les points de différens ordres dont les lignes courbes peuvent être conçues formées. Ce Mémoire fait donc partie de ceux qui, ſuivant M. Bézout, n'*ont pu être approuvés* par l'Académie. On deſireroit que cet Académicien voulût bien nous faire part des raiſons qui auroient porté cette Compagnie à ne point approuver des choſes ſur leſquelles ſon jugement n'a pas même été requis. Sans doute que M. Bézout aura quelque choſe de mieux à produire ſur l'état de courbure, & qu'il rendra plus ſenſible qu'on ne vient de faire, la différence qu'il doit néceſſairement y avoir dans la nature de la courbure de deux lignes courbes, dont l'une ſeroit rectifiable, & l'autre non rectifiable. Nous l'invitons à donner la ſolution de ce problême important, & en attendant que M. Bézout enrichiſſe la Géométrie de cette découverte intéreſſante, nous nous ſommes déterminés à publier la doctrine qui nous a paru devoir y conduire.

Nous croyons devoir ajouter ici une obſervation qui peut avoir ſon utilité; ſavoir, que ſi l'on nomme a, le diamètre d'un cercle, l'équation $y^2 = ax - x^2$, qui

eſt l'équation ordinaire à cette courbe, n'eſt pas l'équation la plus générale qui puiſſe lui convenir, ni qui exprime par conſéquent le plus grand nombre de cas, ou de rapports entre les coordonnées de la courbe déterminée, relativement à un arc quelconque, dont la corde ſeroit ſuppoſée a; car il eſt évident que l'équation $y^2 = ax - x^2$, n'exprime qu'un cas particulier; ſavoir, le cas où la corde a, devient le diamètre même du cercle, & que par conſéquent cette équation devient en quelque ſorte oiſive, lorſqu'il s'agiroit de l'équation à un arc moindre que la demi-circonférence, & dont la corde ſeroit par conſéquent moindre que le diamètre.

Soit ACB, un arc quelconque de cercle, AB (a) ſa corde, ſur laquelle prenant les coupées AO (x), & les ordonnées OC (y), nommant la variable OM (z) (*Fig.* 44), l'équation à l'arc quelconque ACB, ſera, par la propriété du cercle : $AO \times OB = CO \times OM$; c'eſt-à-dire, $ax - x^2 = yz$. Telle doit être l'équation générale à tous les arcs de cercle. L'on voit que quand la corde AB, eſt égale au diamètre, alors $CO = OM$, & par conſéquent l'équation, dans ce cas particulier, devient $y^2 = ax - x^2$.

L'équation générale au cercle étant donc, $yz = ax - x^2$, tandis que l'équation à la parabole renverſée eſt, $ay = ax - x^2$, il s'enſuit que l'équation au cercle contient une variable de plus que l'équation à la parabole, & que par conſéquent, le cercle eſt une courbe moins ſimple que la parabole. L'élément du cercle eſt donc $y = \frac{ax - x^2}{z}$, & l'élément de la parabole $y = \frac{ax - x^2}{a}$. D'où il ſuit que la détermination de l'élément de la parabole, ne dépend que de la détermination de la ſeule variable x, tandis que la détermination de l'élément du cercle, conſidéré relativement à un arc quelconque, dépend de la détermination des deux variables x, & z. D'où il réſulte encore que la parabole pourra être quarrée, & que le cercle ne pourra point l'être. Et en effet, l'élément de la parabole étant $y = \frac{ax - x^2}{a} = x - \frac{x^2}{a}$, la quadrature de cette courbe ſera : $S.y\,dx = S.x\,dx - S.\frac{x^2 dx}{a} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}$; mais l'élément du cercle étant $y = \frac{ax - x^2}{z}$; d'où, en multipliant par la différentielle dx, ſuit l'égalité : $y\,dx =$

$\frac{axdx-x^2dx}{z}$, l'on voit clairement que ce qui empêche d'intégrer l'expreſſion $\frac{axdx-x^2dx}{z}$, & par conſéquent de quarrer indéfiniment un ſegment $ACBA$ quelconque de cercle, c'eſt la variable z, qui diviſe ici la différentielle $axdx-x^2dx$, puiſque cette expreſſion s'intégre lorſque cette variable devient conſtante, comme dans la parabole, & en conſéquence que c'eſt originairement la variable qui entre de plus dans l'équation au cercle, que dans l'équation à la parabole, qui fait que cette premiere courbe ne peut être quarrée en termes finis, comme la ſeconde; mais on peut employer à cette quadrature une méthode d'approximation. L'équation à tous les ſegmens quelconques de cercle étant $y=\frac{ax-x^2}{z}$, multipliant par la différentielle dx, l'on aura : $ydx=\frac{axdx-x^2dx}{z}$, ſuppoſant z, conſtante, & faiſant $x=a$, l'expreſſion de tous les ſegmens de cercle ſeroit $S.ydx=\frac{\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{z}=\frac{\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}}{z}=\frac{a^3}{6z}$; c'eſt-à-dire, que tous les ſegmens de cercle ſeroient égaux à la ſixieme partie du cube de leur corde,

diviſée par une variable, ou indéterminée z, qu'on peut ſuppoſer plus grande, ou plus petite. Que le ſegment du cercle ſoit ſuppoſé, par exemple, le ſegment $ACBA$, du quarré inſcrit, dans le cas ou z, n'auroit point varié, il eſt clair qu'alors $z = a$, ou côté du quarré inſcrit. Donc le ſegment $ACBA$, ſeroit $\frac{a^3}{6z} = \frac{a^2}{6}$; c'eſt-à-dire, qu'alors ce ſegment ſeroit égal à la ſixieme partie du quarré de ſa corde. Déterminant le rapport du diamètre à la circonférence par cette ſuppoſition, on trouveroit une circonférence trop grande par rapport au diamètre. Mais ſi l'on déterminoit z, au point DN, de ſa plus grande variation, ou de ſon plus grand accroiſſement, alors la circonférence qui réſulteroit de cette ſuppoſition, ſeroit trop petite à l'égard du diamètre. Donc le point E, & le point N, pourront être conſidérés comme deux premieres limites, l'une par excès, l'autre par défaut, entre leſquelles on pourroit déterminer une ligne, par exemple, $OM = z$, qui diviſant le cube de la corde AB, donnât une ſurface à très-peu près égale au ſegment $ACBA$, & par conſéquent le rapport très-approché du diamètre à la circonférence.

Obſervation ſur la maniere de déduire les propriétés des Sections coniques.

ON peut définir une ſection conique, conſidérée relativement à ſa directrice & à ſon foyer, une courbe qui eſt le lieu du rapport conſtant de la diſtance où chaque point de la courbe ſe trouve de la directrice & du foyer, exprimé par des lignes plus longues ou plus courtes, ſuivant que le point de la courbe ſeroit plus ou moins éloigné du foyer; enſorte que nommant m, la diſtance du ſommet de la courbe à la directrice; n, la diſtance du même point au foyer; D, la diſtance d'un point quelconque de la courbe à la directrice; d, la diſtance de ce même point au foyer, l'on aura toujours cette analogie : $m : n :: D : d$, dont réſultera, pour premiere équation, commune aux trois ſections coniques, $md = nD$. D'où l'on tirera ces égalités, $d = \frac{n}{m} D$. $D = \frac{m}{n} d$; qui doivent être le principe de toutes les propriétés dont ces courbes ſeront ſuſceptibles.

Dans le cas d'une ordonnée qui paſ-

ſeroit par le foyer de ces courbes, il eſt évident que la diſtance D, de l'extrémité de cette ordonnée à la directrice, ſera $m+n$, donc, dans ce cas, $D=m+n$: ſubſtituant cette valeur de D, dans la formule ci-deſſus $d=\frac{n}{m}D$; l'on aura: $d=\frac{n}{m}\times\overline{m+n}=\frac{mn+n^2}{m}$, pour expreſſion de l'ordonnée qui paſſeroit par le foyer des ſections coniques. Cette double ordonnée, ou $\frac{2mn+2n^2}{m}$, eſt ce qu'on appelle le *paramètre* de la ſection. Ainſi le paramètre, dans toute ſection conique, ſera $\frac{2mn+2n^2}{m}$.

Mais un point quelconque de ces courbes étant un lieu du rapport $\frac{m}{n}$, il ne pourra arriver que trois cas, & c'eſt le nombre de ces cas qui détermine néceſſairement celui de toutes les courbes poſſibles qui ſeroient le lieu du rapport $\frac{m}{n}$; car ou $m=n$, ou $m>n$, ou $m<n$: voilà tous les cas poſſibles qui pourront arriver. Il ne pourra donc y avoir que trois courbes qui ſeroient le lieu du rapport $\frac{m}{n}$, & ce ſont préciſément ces mêmes courbes que les Géomètres nomment *Sections coniques*,

parce que c'eſt dans le cône qu'elles ont d'abord été conſidérées.

Dans le cas où $m=n$, le paramètre devient $\frac{2m^2+2m^2}{m}=4m$, c'eſt-à-dire, que dans ce cas, le paramètre eſt égal à quatre fois la diſtance m, ou n, du ſommet de la courbe à la directrice, ou au foyer; & alors la courbe eſt appellée *parabole*.

Dans le cas où, $m>n$, la courbe eſt une ellipſe.

Dans le cas où, $m<n$, la courbe eſt une hyperbole.

Si l'on nomme, à l'ordinaire, l'abſciſſe x, l'ordonnée y, relativement à un point quelconque de la ſection, la diſtance du foyer au point de l'axe où aboutira l'ordonnée ſera; ſavoir, $x-n$, au-deſſous du foyer, & $n-x$, au-deſſus, ce qui eſt évident. La diſtance de l'extrémité de l'ordonnée à la directrice ſera $m+x$. Ainſi, à ce point de la courbe, $d=\frac{n}{m}D=\frac{n}{m}\times\overline{m+n}=\frac{mn+nx}{m}$, donc l'expreſſion générale de la diſtance d, d'un point quelconque de la courbe au foyer, ſera: $\frac{mn+nx}{m}$.

Mais cette diſtance, ou ligne $\frac{mn+nx}{m}$,

eſt toujours l'hypothènuſe, ou grand côté, d'un triangle rectangle, dont le ſecond côté ſeroit l'ordonnée y, & le troiſieme, $x-n$, ou $n-x$; c'eſt-à-dire, la ligne compriſe entre le foyer & le point où l'ordonnée couperoit l'axe; d'où réſultera cette égalité, $\left(\frac{mn+nx}{m}\right)^2 = y^2 \pm \overline{x \mp n}^2$; d'où on tirera l'équation, $y^2 = \frac{2mn+2n^2}{m} \cdot x \pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2} \cdot x^2$, pour ſeconde équation commune aux trois ſections coniques.

Dans le cas où, $m=n$, l'équation ſe réduiroit à $y^2 = \frac{2mn+2n^2}{m} \cdot x$, & ſeroit à la parabole, & comme $\frac{2mn+2n^2}{m}$, eſt le paramètre qu'on peut appeller, p, l'équation ſeroit réduite à $y^2 = px \pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2} \cdot x^2$, & pour la parabole à $y^2 = px$.

Dans le cas où, $m>n$, le dernier terme où ſe trouve x^2, ſeroit négatif, & la courbe ſeroit alors une ellipſe.

Dans le cas où, $m<n$, le dernier terme où ſe trouve x^2, ſera poſitif, & la courbe ſera une hyperbole.

Ainſi l'équation ci-deſſus, en même-tems qu'elle eſt immédiatement déduite de

la génération des trois ſections coniques, & du rapport $\frac{m}{n}$, dont ces courbes ſont le lieu, nous manifeſte exactement leur nature; puiſqu'elle nous fait voir, premiérement, que dans la parabole le quarré y^2 de l'ordonnée eſt égal au produit du paramètre, p, par l'abſciſſe x; ſecondement, que dans cette courbe la variable x, eſt moins élevée d'une unité dans ſon expoſant que la variable, y; troiſiémement, que l'équation à l'ellipſe & à l'hyperbole eſt toujours un produit du paramètre p, qui n'eſt qu'une fonction des données m, n, par l'abſciſſe, x, moins ou plus le produit de la quantité conſtante, $\pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2}$, qui n'eſt de même qu'une fonction des mêmes données m, n, par le quarré x^2, de la même variable x.

Si nous cherchons à déterminer l'expreſſion des axes, par les mêmes données m, n, il ſera facile de ſe convaincre que ces axes ne ſont & ne peuvent être auſſi que quelques fonctions de ces mêmes données. En effet le premier demi-axe, ou axe principal, ſera toujours, $\frac{mn}{\pm m \mp n}$, & le ſecond demi-axe, $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}}$, qui ſont

évidemment des fonctions des données m, n.

Si la courbe eſt une parabole, alors $m=n$. Donc le premier demi-axe devient : $\frac{mn}{o} = \frac{m^2}{o}$, & le ſecond, $\sqrt{\frac{2m^3}{o}}$, c'eſt-à-dire, que ces deux demi-axes ſont infinis, & même le premier $m \cdot \frac{m}{o}$, eſt infiniment plus grand que le ſecond, $\sqrt{\frac{2m^3}{o}} = m \cdot \sqrt{\frac{2m}{o}}$; car $\frac{\frac{m}{o}}{\frac{o}{\infty}} = \frac{m}{1} = \infty m$. Donc m ; $\frac{m}{o} = \infty m \cdot m$, & $m\sqrt{\frac{2m}{o}} = m\sqrt{\infty 2m}$; mais $\frac{m}{o} = \infty m$, eſt le quarré de $\sqrt{\frac{m}{o}} = \sqrt{\infty m}$; & tout quarré a un rapport d'autant plus grand avec ſa racine, que le nombre qui le formera ſera ſuppoſé plus grand : ſi donc ce nombre eſt ſuppoſé infini, comme dans l'exemple préſent, $\frac{m}{o} = \infty m$, ſon rapport avec ſa racine, $\sqrt{\frac{m}{o}} = \sqrt{\infty m}$, ſera infini, & par conſéquent $\frac{m}{o} = \infty m$, ſera infiniment plus grand que ſa racine

ne $\sqrt{\frac{m}{0}} = \sqrt{\infty m}$. Donc le premier demi-axe infini $\frac{m^2}{0}$ de la parabole, ſera infiniment grand à l'égard du ſecond demi-axe auſſi infini $\sqrt{\frac{2m^3}{0}}$.

Si la courbe eſt une ellipſe, alors, $m > n$. Donc, dans ce cas, les deux demi-axes ſont finis & poſitifs, & la courbe eſt néceſſairement fermée. Cette courbe ſe rapprochera toujours d'autant plus de la parabole que, n, ſeroit plus près de la valeur de m; puiſque, dans le cas où $n = m$, l'ellipſe ſe transforme en cette même courbe.

Dans le cas où $m < n$, les deux demi-axes $\frac{mn}{\pm m \mp n}$, $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m \mp n}}$, ſont négatifs; dès-là leur direction eſt contraire au ſens des ordonnées, & ces axes ſortiront de la courbe; ce qui ſera le cas de l'hyperbole, qui ſeroit également transformée en parabole, comme l'ellipſe, en ſuppoſant $n = m$.

Ainſi il ſeroit facile de rapprocher à l'infini une ellipſe & une hyperbole de la valeur d'une parabole, en rapprochant, dans le premier cas, n, de la valeur de

m, & dans le ſecond, m, de la valeur de n.

Si l'on porte actuellement ſur la directrice les diſtances m, n, & que l'on mene les lignes relatives à la conſtruction de l'expreſſion $\frac{mn}{\pm m \mp n}$, on formera deux triangles rectangles & ſemblables, d'où on tirera; ſavoir, pour l'ellipſe, l'analogie: $m - n : m :: n : \frac{mn}{m-n}$; ce dernier terme étant toujours l'expreſſion du côté moyen de l'un des deux triangles, & ce même côté eſt en même tems égal au demi-grand axe de l'ellipſe: ſi l'on nomme, a, ce demi-grand axe de l'ellipſe, l'on aura donc, $a = \frac{mn}{m-n}$; & faiſant les mêmes choſes pour l'hyperbole, l'on trouvera que l'expreſſion de ſon demi-grand axe ſera: $a = \frac{mn}{n-m}$.

Le demi-grand axe de l'ellipſe étant donc, $a = \frac{mn}{m-n}$, ſi l'on y ajoute, m, l'on aura, $\frac{mn}{m-n} + m = \frac{m^2}{m-n}$, pour expreſſion de la diſtance de la directrice au centre de l'ellipſe; mais, dans la formule ci-deſſus, $d = \frac{nD}{m}$, ſi l'on ſubſtitue à D,

cette distance $\frac{m^2}{m-n}$, qui est précisément celle de la directrice à l'extrémité du petit axe, l'on aura, $d = \frac{nm^2}{m^2-mn} = \frac{mn}{m-n}$, qui démontre que la distance, d, de l'extrémité du petit axe, au foyer de la courbe, est égale au demi-grand axe $\frac{mn}{m-n}$ de l'ellipse; ce qui est, en effet, l'une des principales propriétés de cette courbe.

Le demi-grand axe étant donc, $\frac{mn}{m-n}$, si l'on en retranche, n, l'on aura : $\frac{mn}{m-n} - n = \frac{n^2}{m-n}$, pour expression de la distance du foyer au centre de l'ellipse.

Nommons, b, le demi-petit axe, il sera le côté d'un triangle rectangle dont l'hypothènuse sera $d = \frac{mn}{m-n}$, & le troisième côté $\frac{n^2}{m-n}$. Donc : $d^2 = \left(\frac{mn}{m-n}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{n^2}{m-n}\right)^2$, ou $\frac{m^2n^2}{m^2-2mn+n^2} = b^2 + \frac{n^4}{m^2-2mn+n^2}$. Donc, $b^2 = \frac{m^2n^2-n^4}{m^2-2mn+n^2}$. Donc, $b = \frac{n}{m-n}\sqrt{m^2-n^2} = n\sqrt{\frac{m-n \cdot m+n}{m-n \cdot m-n}} = n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}} = \sqrt{\frac{mn^2+n^3}{m-n}}$. Ainsi le demi-

ſecond axe de l'ellipſe ſera : $\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{m-n}}$.
On trouveroit de même que le demi-ſecond axe de l'hyperbole ſeroit : $\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{n-m}}$.

Par conſéquent l'expreſſion du demi-premier axe, dans les trois ſections coniques, ſera $\frac{mn}{\pm m\mp n} = a$, & l'expreſſion du demi-ſecond axe, $\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{\pm m\mp n}} = b$. Ces deux axes ſont infinis dans la parabole, finis & poſitifs dans l'ellipſe, finis & négatifs dans l'hyperbole.

L'expreſſion des axes étant déterminée, dans les trois ſections coniques, il s'enſuit que, dans ces mêmes courbes, le paramètre $P = \frac{2mn+2n^2}{m}$, ſera toujours la troiſieme proportionnelle aux deux axes $2\frac{mn}{\pm m\mp n}$, $2\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{\pm m\mp n}}$, de ces courbes ; puiſqu'en effet l'on aura : $\frac{2mn}{\pm m\mp n} : 2\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{\pm m\mp n}} :: 2\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{\pm m\mp n}} : \frac{2mn+2n^2}{m}$, ce qui comprend même le cas de la parabole, quoique les deux axes ſoient infinis ; car les termes de cette proportion

ſeroient, dans ce cas, $\div 2\frac{m^2}{0} = \infty .2m^2 : \sqrt{\frac{8m^3}{0}} = \sqrt{\infty .8m^3} : 4m$; c'eſt-à-dire, $\infty .2m^2 : \sqrt{\infty .8m^3} :: \sqrt{\infty .8m^3} : 4m$.

L'on voit auſſi que les deux axes $\infty .2m^2$, $\sqrt{\infty .8m^3}$, de la parabole étant donnés, l'on peut toujours en déduire le paramètre $4m$; puiſque ce paramètre eſt égal au quarré du ſecond axe, diviſé par le premier, comme dans les autres ſections coniques, c'eſt-à-dire, à $\frac{\infty .8m^3}{\infty .2m^2} = 4m$.

On peut rapporter aux axes a, b, des ſections coniques, l'équation $y^2 = \frac{2mn+2n^2}{m} . x \pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2} . x^2$, commune à ces trois courbes, que l'on a vue ci-deſſus; car premiérement les conſtantes, $\frac{2mn+2n^2}{m}$, étant égales au paramètre P, ou au quarré du ſecond axe diviſé par le premier, l'on aura : $\frac{2mn+2n^2}{m} = P = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$: ſubſtituant, dans l'équation ci-deſſus, $\frac{2b^2}{a}$, à ſa valeur, $\frac{2mn+2n^2}{m}$, l'équation ſera, $y^2 = \frac{2b^2}{a} x^2 \pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2} . x^2$. Secondement, il eſt évident

que $\frac{\pm m^2 \mp n^2}{m^2} = \pm \frac{b^2}{a^2}$; car $\pm \frac{b^2}{a^2} = \left\{ \frac{\frac{mn^2+n^3}{\pm m \mp n}}{\frac{m^3 n^2}{m^3 - 2mn + n^2}} \right\} = \frac{mn^2+n^3 \cdot \pm m \mp n}{m^3 n^2} = \pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2}$.

ſubſtituant donc, dans la même équation, $\pm \frac{b^2}{a^2}$, à ſa valeur $\pm \frac{m^2 \mp n^2}{m^2}$, l'équation commune aux trois courbes, rapportée à leurs axes, ſera : $y^2 = \frac{2b^2}{a} x \pm \frac{b^2}{a^2} x^2$.

Si l'on ſubſtitue, dans cette derniere équation, le paramètre P, à ſa valeur $\frac{2b^2}{a}$, l'on aura l'équation $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$, commune aux trois ſections, rapportée à leur paramètre P. L'on voit que, dans le cas de la parabole, l'axe $2a$, étant infini, le terme, $\frac{px^2}{2a}$, eſt nul relativement au premier, & que l'équation ſe réduit alors à, $y^2 = px$.

De l'équation ci-deſſus, $y^2 = \frac{2b^2}{a} x \pm \frac{b^2}{a^2} x^2$, ſuit cette analogie : $y^2 : (2ax \pm x^2) :: b^2 : a^2$; c'eſt-à-dire, que dans toute ſection conique le quarré de l'ordonnée eſt au produit de ſes abſciſſes, comme le quarré du demi-ſecond axe, eſt au quarré du demi-premier axe ; & comme le rapport

de ces quarrés eſt conſtant, il en réſulte encore que les quarrés de deux ordonnées quelconques ſont entr'eux, comme le produit de leurs abſciſſes, c'eſt-à-dire, que $y^2 : Y^2 :: 2ax - x^2 : 2aX - X^2$; & attendu que l'axe $2a$, eſt infini dans la parabole, les quarrés x^2, X^2, y ſont nuls, à l'égard des rectangles $2ax$, $2aX$; ainſi, dans ce cas, l'analogie eſt : $y^2 : Y^2 :: ax : ax$, ou $y^2 : Y^2 :: x : X$.... &c. &c.

Il eſt évident que l'on pourroit trouver, en procédant de la ſorte, les autres propriétés des ſections coniques, en partant toujours des mêmes données m, n, ce qui paroît bien plus méthodique, & bien plus régulier, que de recourrir à de nouvelles données, comme font la plupart des Auteurs, lorſqu'ils ont à démontrer certaines propriétés de ces courbes; par exemple, l'expreſſion des axes, du paramètre..... &c. qui ne ſont que de ſimples fonctions des données m, n, doit viſiblement être déduite de ces mêmes données m, n; car de ſe borner à appeller $2a$, le premier axe; $2b$ le ſecond, comme on le pratique ordinairement, c'eſt rompre la chaîne des idées, & voiler le rapport que ces deux lignes ont avec les données m, n; ce qui peut être dit de tout autre rapport

que ces mêmes données, priſes ſéparément, ou combinées avec les variables x, & y, peuvent avoir avec d'autres lignes, ou grandeurs réſultantes des mêmes courbes. Nous venons de voir qu'en exprimant les axes, & le paramètre par les données m, n, l'on trouvoit tout de ſuite que le paramètre étoit la troiſieme proportionnelle à ces mêmes axes, l'axe principal étant le premier de la proportion ; mais ſi l'on s'étoit borné à exprimer ces lignes par $2a$, $2b$, P, ſans avoir auparavant prouvé que $2a = \frac{2mn}{\pm m \mp n}$; que $2b = 2\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{\pm m \mp n}}$; que $P = \frac{mn+n^2}{m}$, il eſt clair que l'on n'auroit pu conclure immédiatement le rapport $2a : 2b :: 2b : P$, comme on peut l'inférer, en exprimant les mêmes quantités par les données m, n, dont elles ne ſont que des fonctions, en cette ſorte : $\frac{2mn}{\pm m \mp n} : 2\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{\pm m \mp n}} :: 2\sqrt{\frac{mn^2+n^3}{\pm m \mp n}} : \frac{2mn+2n^2}{m}$: & comme ce raiſonnement s'applique aux autres propriétés des ſections coniques, il paroît en réſulter que la méthode qui auroit pour objet de déduire toutes ces propriétés des

ſeules données m, n, priſes ſeules, ou combinées avec les variables x, & y, ſuivant les cas, ſeroit tout à la fois plus réguliere, plus ſimple, & plus lumineuſe que celle que les Analyſtes y employent communément.

Obſervations ſur la formule d'un binome a + b *élevé à une puiſſance quelconque* m, *attribuée à M. Newton.*

LA formule d'un binome $a+b$, élevé à une puiſſance quelconque m, eſt généralement attribuée à M. Newton ; l'on croit qu'il y auroit plus de juſtice à rapporter à M. Paſcal, la gloire de cette découverte analytique, attendu qu'elle fait partie des propriétés du fameux triangle arithmétique, que ce célèbre Géomètre publia en 1654 ; c'eſt-à-dire, long-tems avant que le nom de M. Newton fût connu, ainſi qu'on va le démontrer.

										O	*M*	
A.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	*B*
C.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.		9.	10.	*D*
E.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.			36.	45.	*F*
G.	1.	4.	10.	20.	35.	56.				84.	120.	*H*
I.	1.	5.	15.	35.	70.					126.	210.	*K*
		1.	6.	21.	56.					126.	252.	
			1.	7.	28.					84.	210.	
				1.	8.					36.	120.	
					1.					9.	45.	
										1.	10.	
										P.	1.	

Soit en effet le triangle arithmétique *ABNPA*, les nombres qui compoſent ce triangle ingénieux ſont tels que comptés de la gauche à la droite, c'eſt-à-dire, par rangs horizontaux, *AB*, *CD*, *EF*..... &c, ils expriment les coëfficiens numériques du premier, ſecond, troiſieme, quatrieme... &c. termes de toutes les puiſſances auxquelles un binome $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé. Les unités, par exemple, qui compoſent le premier rang *AB*, ſont les coëfficiens du premier terme de ces mêmes puiſſances; c'eſt-à-dire, de $1.a^2$. $1.a^3$. $1.a^4$.... &c. ce qui eſt évident.

Les nombres naturels 1, 2, 3, 4..... &c. qui forment le ſecond rang *CD*, expriment par ordre la ſuite des coëfficiens du ſecond terme de ces mêmes puiſſances; par exemple, 2, 3, 4... &c. ſont les coëfficiens du ſecond terme du binome $a+b$, élevé à la ſeconde, troiſieme, quatrieme... &c. puiſſances, c'eſt-à-dire, de $2.ab$, ſecond terme de $a+b$, élevé au quarré; de $3.a^2b$, ſecond terme de $a+b$, élevé au cube; de $4.a^3b$, ſecond terme de $a+b$, élevé à la quatrieme puiſſance.... &c. Il en eſt de même des troiſieme, quatrieme, cinquieme rangs.... *EF*, *GH*, *IK*.... &c, dont les nom-

bres qui les compoſent expriment, par ordre, la ſuite des coëfficiens des troiſiemes termes *EF*, des quatriemes termes *GH*, des cinquiemes termes *IK*... &c. de toutes les puiſſances auxquelles le binome $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé. Delà il ſuit qu'en prenant les rangs perpendiculaires *MN*, *OP*... &c, les nombres qui les forment exprimeront, la ſuite des coëfficiens des termes du binome $a+b$, élevé à une puiſſance déterminée; par exemple, 10, 45, 120... &c. ſont les coëfficiens du ſecond, troiſieme, quatrieme... &c. terme du binome $a+b$, élevé à la dixieme puiſſance. 9, 36, 84... &c. ſont ceux du ſecond, troiſieme, quatrieme... &c. terme du même binome élevé à la neuvieme puiſſance, & ainſi des autres rangs perpendiculaires.

Telles ſont les deux propriétés fondamentales de ce triangle numéral; à quoi on doit ajouter que les nombres, par exemple, 10, 45, 120, 210.... &c. pris de ſuite, expriment encore en combien de manieres dix choſes peuvent être combinées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre... &c. Ainſi, dix lettres, par exemple, priſes une à une, donnent dix combinaiſons,

quarante-cinq ſi on les prend deux à deux, cent vingt, priſes trois à trois, & deux cents dix, en les prenant quatre à quatre.... &c; enſorte que c'eſt la même choſe de trouver les coëfficiens 10, 45, 120, 210... &c. des termes, par exemple, de la dixieme puiſſance du binome $a+b$, ou de déterminer les différentes combinaiſons des dix racines de la puiſſance $\overline{a+b}^{10}$, priſes une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre... &c. Par exemple, 252, coëfficient du ſixieme terme d'un binome $a+b$, élevé à la dixieme puiſſance, exprime en même-tems les 252 combinaiſons des dix racines, priſes cinq à cinq, de cette puiſſance $\overline{a+b}^{10}$, ce qui peut être dit du coëfficient d'un terme quelconque de toute puiſſance à laquelle $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé. Ces différentes Obſervations avoient été faites par M. Paſcal lui-même, dans l'expoſition qu'il a faite des diverſes propriétés de ſon triangle arithmétique, & étoient connues de tous les Géomètres de ſon tems. L'on ſe ſervoit même de ce triangle pour trouver avec facilité les coëfficiens de tous les termes d'un binome $a+b$, élevé à une puiſſance déter-

minée quelconque, de maniere qu'il ne reſte plus qu'à prouver que la formule ſi célèbre $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}....$ &c. des coëfficiens numériques des termes d'un binome $a+b$, élevé à la puiſſance indéterminée m, appartient également à ce triangle arithmétique de M. Paſcal, d'où M. Newton l'a très-certainement tirée; d'autant plus que ce grand Géomètre l'a expoſée purement & ſimplement, comme un fait vrai, ſans l'accompagner d'aucune démonſtration particuliere qui eût pu faire juger qu'il l'avoit déduite d'une théorie nouvelle, & qui lui ſeroit propre; ce qui fait dire à l'Auteur de l'Hiſtoire des Mathématiques(*a*) que *c'eſt ſans doute par la conſidération des nombres triangulaires* 1, 3, 6... *&c. des nombres pyramidaux* 1, 4, 10... *&c. que M. Newton parvint à démêler cette formule*, idée qui fait aſſez entendre que c'eſt au triangle Arithmétique même de M. Paſcal, que cette formule doit ſon origine. Pour trouver donc la formule $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-3}{3}.\frac{m-4}{5}...$ &c. des coëfficiens numériques d'un binome $a+b$, élevé à la puiſſance quelconque m, par

(*a*) II. Vol. *pag.* 316.

le triangle arithmétique de M. Pascal ; rien ne peut être plus simple, puisque cette formule y est très-clairement écrite. Et en effet, par une propriété de ce triangle, tous les nombres qui composent un rang perpendiculaire quelconque, par exemple, *MN*, ne sont autre chose que cette même formule appliquée à des nombres, ou cas particuliers ; car dans le cas supposé, les nombres qui composent le rang *MN*, sont les coëfficiens de tous les termes d'un binome $a+b$, qui seroit élevé à la dixieme puissance. Ainsi dans ce cas, $m=10$; le premier terme de cette puissance sera donc : $a^{10}=a^m$; & le second terme $10a^9b=ma^{m-1}b$; mais le troisieme terme quarante-cinq, du triangle arithmétique est égal à $\frac{10\times 9}{2}=\frac{m.m-1}{2}$. le quatrieme terme $120=\frac{10\times 9\times 8}{2.3}=\frac{m.m-1.m-2}{2.3}$; le cinquieme terme $210=\frac{10.9.8.7.}{2.3.4.}=\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4.}$.... &c. & ainsi de suite ; ensorte qu'en multipliant successivement le second terme 10, du rang perpendiculaire *MN*, du triangle arithmétique, par tous les nombres 9, 8, 7, 6.... &c. qui sont sur le même rang hori-

zontal DC, & diviſant ces produits ſucceſſivement par 2, 3, 4... &c. ſuivant que les racines de la puiſſance $\overline{a+b}^{10}$, devroient ſe combiner 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4... &c. L'on trouveroit par ordre, par la propriété de ce triangle, les coëfficiens numériques 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 de tous les termes du binome $a+b$, élevé à la dixieme puiſſance; & attendu qu'il en ſeroit de même des coëfficiens des termes des autres puiſſances, auxquelles le binome $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé, par exemple, des coëfficiens OP, de la neuvieme puiſſance de $a+b$, leſquels ſeroient formés de même par $\frac{9.8}{2}.\frac{9.8.7}{2.3}.\frac{9.8.7.6}{2.3.4}$... &c; il s'enſuit que nommant en général m, la puiſſance à laquelle un binome $a+b$, ſeroit ſuppoſé élevé, les coëfficiens des termes de cette puiſſance ſeront, par le triangle arithmétique de M. Paſcal, $m.\frac{m.m-1}{2}.\frac{m.m-1.m-2}{2.3}.\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}$... &c. Il eſt donc vrai que cette formule des coëfficiens numériques, d'un binome quelconque $a+b$, élevé à une puiſſance quelconque m, eſt clairement écrite, ainſi qu'on l'a déja dit, dans le triangle arithmétique

métique de M. Paſcal ; & que c'eſt par conſéquent à M. Paſcal, & non point à M. Newton, à qui on eſt redevable de cette découverte intéreſſante, qui a été le germe de tant d'autres découvertes utiles, par l'uſage étendu que l'on a fait de cette formule en ſuppoſant m, un nombre quelconque, entier ou rompu, poſitif ou négatif.

On peut rendre cette vérité encore plus ſenſible, en réuniſſant, dans le triangle arithmétique même, les puiſſances d'un binome, par exemple, $x + a$, à leur coefficient.

La ſeule inſpection de ce triangle, ainſi diſpoſé, démontre tout ce qui vient d'être dit. On voit à l'œil, que l'expoſant de la grandeur x, conſidérée dans toutes les colonnes perpendiculaires MN, OP... &c. y décroît d'une unité en deſcendant de M, vers N, ainſi qu'il arrive aux nombres naturels de la colonne horizontale DC, leſquels ſont les mêmes nombres que ceux des expoſans de la grandeur x, & donnent par conſéquent, étant multipliés entr'eux, & ſucceſſivement diviſés par 2, 3, 4.... &c, les mêmes produits que ceux qui réſulteroient de la multiplication ſucceſſive des expoſans de la grandeur x ;

			O.	M.
1. x^6.	1. x^7.	1. x^8.	1. x^9.	1. $x^{10}a^0$.
C. 6. x^5 a.	7. x^6 a.	8. x^7 a.	9. x^8 a.	10. x^9 a. D.
15. x^4 a^2.	21. x^5 a^2.	28. x^6 a^2.	36. x^7 a^2.	45. x^8 a^2.
20. x^3 a^3.	35. x^4 a^3.	56. x^5 a^3.	84. x^6 a^3.	120. x^7 a^3.
15. x^2 a^4.	35. x^3 a^4.	70. x^4 a^4.	126. x^5 a^4.	210. x^6 a^4.
6. x a^5.	21. x^2 a^5.	56. x^3 a^5.	126. x^4 a^5.	252. x^5 a^5.
1. a^6.	7. x a^6.	28. x^2 a^6.	84. x^3 a^6.	210. x^4 a^6.
	1. a^7.	8. x a^7.	36. x^2 a^7.	120. x^3 a^7.
		1. a^8.	9. x a^8.	45. x^2 a^8.
			1. a^9.	10. x a^9.
			P.	1. a^{10}.
				N.

succeſſivement diviſés par les mêmes nombres 2, 3, 4.... &c.

On voit encore qu'un coëfficient quelconque, par exemple, 252, eſt toujours égal à $\frac{210 \times 6}{5}$, c'eſt-à-dire, au produit du coëfficient 210, du terme précédent, par l'expoſant 6, de la grandeur x, conſidérée dans ce même terme, diviſé par l'expoſant 4, de la grandeur a, accru d'une unité, ou, ſi l'on veut, diviſé par l'expoſant de la grandeur a, conſidérée dans le terme ſuivant, qui eſt préciſément le terme où les 10 racines de la puiſſance x^{10}, ſont priſes 5 à 5; ce qui fait que le produit 210×6, doit être diviſé par 5; car tout coëfficient, tel par exemple, que 210, en devenant le coëfficient 252 du terme ſuivant, doit croître par la multiplication de l'expoſant 6, de la grandeur x, & décroître par la divi-

ſion du nombre qui exprimera le nombre des racines de la puiſſance qui devront être priſes & combinées enſemble, & ce dernier nombre eſt toujours celui de l'expoſant de la grandeur a, conſidérée dans le terme ſuivant qui, dans l'exemple préſent, eſt $252.x^5 a^5$. Delà il ſuit que les coëfficiens ſeront ſucceſſivement plus grands, quand l'expoſant de la grandeur x, par lequel il faudra multiplier, ſera plus grand que l'expoſant de la grandeur a, par lequel il faudra diviſer. Et ils ſeront moindres dans le cas contraire.

Si l'on nomme donc en général n, le coëfficient d'un terme quelconque d'un binome $x+a$, élevé à une certaine puiſſance; m, l'expoſant de x, conſidéré dans ce terme; p, l'expoſant de a, conſidéré dans le même terme; l'expreſſion de ce terme ſera $n x^m x^p$, & l'expreſſion du terme ſuivant ſera toujours, & dans tous les cas : $\frac{nm}{p+1} x^{m-1} a^{p+1}$. Et en effet, cherchons par cette formule tous les termes, contenus dans la colonne perpendiculaire, par exemple, MN; le premier terme donnera : $n=1$, $m=10$, $p=0$; donc : $\frac{nm}{p+1}$, $x^{m-1} a^{p+1} = \frac{1 \times 10}{0+1} x^{10-1} a^{0+1} = 10\, x^9 a$, ſera

l'expreſſion du ſecond terme ; mais ce terme donnera $n=10$, $m=9$, $p=1$. Le troiſieme terme ſera donc : $\frac{nm}{p+1} x^{m-1} a^{p+1}$ $= \frac{10\times 9}{1+1} x^{9-1} a^{1+1} = 45 x^8 a^2$, mais ce troiſieme terme donne : $n=45$, $m=8$, $p=2$. Le quatrieme terme ſera donc : $\frac{nm}{p+1} x^{m-1}$ $a^{p+1} = \frac{45\times 8}{2+1} x^{8-1} a^{2+1} = 120 x^7 a^3$. Il en ſeroit de même du reſte des termes de cette colonne perpendiculaire, & de tous ceux contenus dans les autres colonnes, donc la formule $\frac{nm}{p+1} x^{m-1} a^{p+1}$ exprimera tous les termes, excepté le premier, d'un binome $x+a$, élevé à telle puiſſance que l'on voudra. Si l'on fait le coëfficient $n=1$, la formule devient $\frac{m}{p+1} x^{m-1}$ a^{p+1} ; mais comme dans ce cas, le coëfficient m, ſurpaſſe ſeulement d'une unité l'expoſant $m-1$, de la grandeur x. Dès-lors $p=0$, & la formule ſe transforme en $m x^{m-1} a^1$. qui eſt l'expreſſion du ſecond terme d'un binome $x+a$, élevé à la puiſſance m : pour trouver le troiſieme terme, par la formule $\frac{nm}{p+1} x^{m-1} a^{p+1}$, il faudroit faire $n=m-1$, $p=1$; dès-

lors $\frac{n\,m}{p+1} x^{m-2} a^{p+1} = \frac{m \cdot m-1}{2} x^{m-2} a^2$, & continuant ainſi la même opération pour les termes ſuivans, l'on trouveroit la ſuite des termes, $m \cdot x^{m-1} a \cdot \frac{m \cdot m-1}{2} x^{m-2} a^2 \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} x^{m-3} a^3 \ldots$ &c. du binome $x + a$, élevé à la puiſſance m, par la formule générale $\frac{n\,m}{p+1} x^{m-1} a^{p+1}$.

De là ſuit une règle qui peut abréger, dans pluſieurs cas, les opérations à faire pour élever un binome $x + a$, à une puiſſance déterminée, comme par exemple, à la dixieme puiſſance. Je vois d'abord que le premier terme ſera x^{10}; le ſecond $10\,x^9 a$; le troiſieme $\frac{10 \times 9}{2} x^8 a^2 = 45 x^8 a^2$; le quatrieme: $\frac{45 \times 8}{3} x^7 a^3 = 120 x^7 a^3 \ldots$ &c, en conſidérant ſimplement le dernier terme de la ſuite, l'on apperçoit ſur le champ ce qu'il faut faire pour trouver le terme ſuivant, par exemple, le dernier terme de la ſuite étant $45 x^8 a^2$. Je vois que pour trouver le coëfficient du terme ſuivant, il faut multiplier 45, par l'expoſant 8, de la grandeur x, & diviſer ce produit par l'expoſant 2, plus un, c'eſt-à-dire, par 3, du ſecond terme a,

du binome; enſorte que le terme qui doit ſuivre ſera : $120x^7a^3$, & ainſi de tous les autres, l'expoſant du premier terme du binome eſt toujours celui par lequel il faut multiplier, & l'expoſant du ſecond terme, plus un, celui par lequel il faut diviſer; parce que ce dernier expoſant, accru d'une unité, exprime toujours le nombre des racines qui doivent être priſes & combinées enſemble, par les propriétés du triangle arithmétique. Il eſt même évident que l'expoſant du ſecond terme a, du binome $x+a$, ne doit pas reſter oiſif dans la formule $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \ldots$ &c. Les numérateurs de cette formule étant le produit de tous les expoſans du premier terme x, du binome; les dénominateurs ſeront le produit de tous les expoſans du ſecond terme a, du même binome; & c'eſt à quoi cette formule eſt finalement réduite, comme il réſulte de ſa ſeule expoſition : $\frac{m}{1}.x^m a^0 + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2} x^{m-1}a^1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-2}a^2 \ldots$ &c, en obſervant que les diviſeurs 1, 2, 3... &c, ſont les expoſans du ſecond terme a, conſidéré dans le terme ſuivant de la formule.

FIN.

Nouvelle Démonſtration de la fauſſeté de tous les procédés des Géomètres-Newtoniens, dans la génération des Courbes ſuppoſées décrites par des Corps qui ſeroient mûs autour de leur centre de peſanteur.

ON EST obligé de mettre, à la fin de cet Ouvrage, une nouvelle démonſtration, qui a paru très-propre à être ſaiſie par le plus grand nombre des Lecteurs, contre les méthodes Newtoniennes, dans la génération des courbes, ſuppoſées décrites autour d'un point, à cauſe que cette démonſtration n'eſt venue à l'eſprit de l'Auteur qu'au moment où ſon Ouvrage étoit tout imprimé, & qu'il n'étoit plus poſſible de la placer ailleurs. Voici en quoi elle conſiſte.

« Il eſt démontré, dans tous les Ou-
» vrages qui traitent des forces centrales,
» qu'un corps peſant *A* (*fig.* 31), qui
» ſeroit pouſſé verticalement de bas en
» haut, c'eſt-à-dire, dans une direction
» *AMS*, perpendiculaire au centre *A*, de
» peſanteur du corps, avec une vîteſſe
» *V*, quelconque toute acquiſe, per-
» droit, à chaque inſtant de la montée,
» un degré de ſa vîteſſe, égal à celui

*

» qu'il acquerroit à chaque inſtant en » deſcendant, juſqu'à ce que l'action de » la peſanteur lui eût fait perdre, au der- » nier inſtant de la montée, le dernier » degré de la vîteſſe, après quoi il re- » tomberoit librement par l'action de la » peſanteur. Les eſpaces que les vîteſſes » qu'il perdroit l'empêcheroient de par- » courir, comptés depuis le commence- » ment du mouvement, ſeroient en- » tr'eux comme les quarrés des tems, & » encore comme les quarrés des vîteſſes » perdues.... &c.

Tel eſt le principe que nous venons de prendre mot à mot dans l'Analyſe démontrée, *Tom. II, pag.* 509 & 510, ſur les mouvemens retardés, & qu'on trouve dans une infinité d'autres Ouvrages. Si nous l'appliquons actuellement au mouvement des corps qui ſeroient ſuppoſés décrire une courbe quelconque, fermée, ou non fermée, autour de leur centre de peſanteur, on verra, avec la plus grande évidence, que tout ce qu'on a écrit ſur ces mouvemens eſt faux & erroné, puiſqu'il n'exiſte qu'une ſeule courbe, que ces corps peuvent décrire, qui eſt la ſpirale, comme il a été déja démontré.

En effet il eſt généralement accordé

que le centre de peſanteur du corps étant en A, & le corps pouſſé dans la direction verticale AMS, avec une vîteſſe V, égale à celle qu'il auroit acquiſe, s'il étoit tombé de la hauteur, par exemple, MA, dans un tems T; il eſt, dis-je, généralement accordé que l'action de la gravité doit avoir détruit toute la vîteſſe V, imprimée au mobile, dans le cours du même tems T, qu'il employeroit à monter de A en M, & par conſéquent à parcourir, en montant, le même eſpace AM, qu'il auroit décrit en deſcendant.

Mais il eſt évident que le même effet doit toujours s'enſuivre, quelle que puiſſe être ſuppoſée la vîteſſe finie V, qui ſeroit imprimée au corps, & dans quelque lieu que ſon centre de tendance fût ſuppoſé placé comme, par exemple, dans un point F, ou Q; puiſqu'évidemment ce ſimple déplacement de lieu du centre de peſanteur, tranſporté de A, en F, ou Q, ne pourroit pas produire l'effet de rendre perpétuel un mouvement, par la courbe quelconque $AONP$, que le corps décriroit alors, lequel ſeroit terminé au point M, quand le lieu du centre de peſanteur ſeroit en A. Ainſi la vîteſſe quelconque V, imprimée au mobile, étant détruite dans un point M,

lorſque le centre de peſanteur du corps ſeroit en A, il eſt très-évident qu'elle ſeroit également détruite ſur un point N, de la courbe, lorſque ce centre ſeroit placé dans un point F, ou Q; puiſque la hauteur perpendiculaire, à laquelle le corps ſe ſeroit élevé au-deſſus de ſon centre de peſanteur, ſeroit $NF = MA$. Cette hauteur étant la même, ſoit que le centre de peſanteur du corps fût ſuppoſé en A, en F, ou en Q; le même effet, s'enſuivroit toujours, c'eſt-à-dire, que l'action de la gravité auroit totalement détruit la vîteſſe V, imprimée au mobile, au moment où le corps, parvenu en un point N, de la courbe, ſe ſeroit élevé, au-deſſus de ſon centre de peſanteur, d'une quantité $NF = MA$; puiſqu'en effet il ſeroit égal que le corps, remontant de la même quantité au-deſſus de ſon centre de peſanteur, ſuivît la direction de la droite AM, ou de la courbe ANP. Cela eſt de la derniere évidence.

Si la courbe ANP, n'eſt point fermée, & s'écarte à l'infini du centre F, ou Q, de tendance, on voit combien il eſt abſurde de prétendre, d'après les ſavantes théories, des fléches, des ſinus-verſes, des rayons oſculateurs, des rayons de la développée, ſur-tout du fameux parallélogramme des

forces, & d'une peſanteur infiniment petite attribuée à des corps de dimenſions finies, &c, &c; on voit, dis-je, combien il eſt abſurde, malgré de ſi belles choſes, de prétendre, dans le cas d'une courbe non fermée, qu'une vîteſſe finie V, qui ſeroit totalement détruite, dans un point N, de la courbe, pût être éternelle ſur cette même courbe, & élever le corps à une hauteur infinie au-deſſus de ſon centre de peſanteur, tandis que l'on accorde en même tems, qu'en ſuppoſant le centre de peſanteur dans un point A, le corps ne pourroit remonter, avec cette même vîteſſe V, qu'à une hauteur AM, & que parvenu au point M, cette vîteſſe, qui auroit toujours décru, ſeroit totalement détruite.

Si la courbe ANP, eſt ſuppoſée un cercle, dès-lors AM eſt égale au demi-rayon, ou à l'eſpace que le corps auroit parcouru, en tombant, par le ſeul effet de ſa gravité, de la hauteur de ce demi-rayon. Ainſi le centre de peſanteur du corps étant ſuppoſé en A, & le corps ſuppoſé tomber de la hauteur MA, auroit acquis une vîteſſe V, avec laquelle ſeule il pourroit décrire le cercle, & qu'il perdroit, dans le même tems T, employé à l'acquérir, s'il étoit pouſſé verticalement de A, en M, au moment où il ſeroit parvenu au point M;

extrémité du demi-rayon *AM*. Mais il eſt évident, par ce qui vient d'être dit, que cette même vîteſſe *V*, ſeroit totalement détruite, dans un point *N*, de la circonférence *AON*, en tranſportant le centre de peſanteur du corps du point *A*, dans un point *Q*, centre du cercle; puiſqu'à ce point *N*, le corps ſe trouveroit élevé, au-deſſus de ſon centre de peſanteur, de la hauteur perpendiculaire *NF*, préciſément égale à la hauteur *AM*, où cette vîteſſe *V*, ſeroit détruite.

D'où il ſuit qu'un corps, non ſoutenu, ne pourra décrire ni courbes fermées, ni courbes non fermées autour de ſon centre de peſanteur, puiſque la vîteſſe *V*, qui lui auroit été imprimée, doit décroître de moment en moment, par l'action de ſa ſeule gravité, & finir par être entiérement détruite.

Donc le rayon vecteur, à l'extrémité duquel le mobile ſeroit ſuppoſé placé, décroîtroit en tems égal, par le décroiſſement du mouvement de projection.

Donc il s'anéantiroit. Donc le mobile ſeroit ramené au centre de tendance.

Donc la courbe qu'il décriroit, ne pourroit être qu'une ſpirale.

Donc enfin les corps du ſyſtême ſolaire ne peuvent faire leur révolution, autour

de leur centre de peſanteur, qu'en roulant, ou gliſſant ſur des ellipſes matérielles, à la maniere qu'il a été expliqué.

Dès qu'on a méconnu la véritable courbe que des corps, non ſoutenus, peuvent décrire autour de leur centre de peſanteur, on doit juger à quel point les erreurs ont dû être multipliées, dans la théorie des forces centrales, pour avoir ſubſtitué tantôt une parabole, tantôt une ellipſe, tantôt une hyperbole, tantôt un cercle.. &c. au mouvement ſpiral le ſeul poſſible, dans ce cas. On ne doit donc pas s'étonner de cette multitude de faux principes que l'on a été obligé d'attaquer dans la premiere Partie de cet Ouvrage.

Comme il ſera éternellement vrai qu'une vîteſſe quelconque finie V, imprimée à un corps dans un point A, & dans une direction verticale AM, ſeroit détruite dans un point M, lorſque le corps ſeroit remonté au-deſſus de ſon centre de peſanteur, de la hauteur AM, dont il ſeroit deſcendu pour acquérir la vîteſſe V; il ſera éternellement vrai que cette même vîteſſe ſeroit détruite, dans un point N, de la courbe quelconque AON, lorſque le corps ſeroit remonté à une hauteur $FN = AM$. Ce qui ſeul ſuffit pour démontrer la fauſſeté de toutes les méthodes Newto-

nienes, dans la génération des courbes fermées, ou non fermées, ſuppoſées décrites autour d'un point. On voit qu'afin que cette vîteſſe pût être conſervée, il faudroit qu'elle fût infinie, parce qu'alors l'action de la gravité, qui eſt finie de ſa nature, ne produiroit qu'un effet fini ſur une force infinie, dès-là cet effet ſeroit nul à tout inſtant; & par conſéquent la vîteſſe du corps ſeroit conſervée; mais dans le cas d'une vîteſſe finie, il eſt clair que cette vîteſſe doit toujours finir par être détruite, par l'action finie de la gravité.

REMARQUE.

J'ai dit, page 131, qu'on ne trouvoit, *dans aucun Auteur connu*, la diſtinction des courbes rigoureuſes & des courbes polygones, relativement à l'expreſſion de la force centrale d'un corps qui décriroit un cercle; mais, en reliſant le Traité de Dynamique de M. d'Alembert, je me ſuis apperçu que ce ſavant Géomètre avoit eu la même idée que M. Bézout, de qui M. Bézout l'a vraiſemblablement priſe. Au reſte je ne crois point cette idée plus exacte pour être du premier Géomètre de l'Europe, & de quelqu'un dont je révère même plus particuliérement la profondeur du génie, & l'univerſalité des connoiſſances.

TABLE

DES MATIERES

Contenues dans cet Ouvrage.

PRÉFACE. Page *iij*
DÉFINITIONS 1
PREMIERE OBSERVATION *sur la nature des forces centrales & sur leur meſure.* 22
II. OBSERV. *sur la nature du mouvement curviligne & sur la maniere de le concevoir.* 33
III. OBSERV. *sur l'égalité des forces centripète & centrifuge, conſidérées dans un corps qui ſeroit ſuppoſé décrire un cercle, autour de ſon centre, en même tems ſon centre de peſanteur.* 43
IV. OBSERV. *sur la nature des forces centripètes des corps qui décriroient différens cercles, autour d'un centre commun de peſanteur.* 47
V. OBSERV. *sur la meſure de la force centri-*

pète d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre. Pag. 51

VI. OBSERV. *ſur l'expreſſion de la force accélératrice d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre, ou telle autre courbe que l'on voudra ſuppoſer.* 58

VII. OBSERV. *ſur la génération du Mouvement circulaire.* 92

VIII. OBSERV. *ſur la génération du Mouvement elliptique.* 102

IX. OBSERV. *ſur la génération du Mouvement parabolique.* 117

EXAMEN critique du jugement de l'Académie Royale des Sciences, ſur quatre propoſitions ſur les Loix des Forces centrales, ſoumiſes au jugement de cette Académie, par l'Auteur des préſentes Obſervations, dont la premiere a deux objets : 1°, *de prouver que la meſure de la force accélératrice d'un corps qui décriroit un cercle par ſon centre eſt toujours* $\frac{c^2}{2r}$, *en nommant* c, *l'arc quelconque décrit, &* r, *le rayon du cercle parcouru.* 2°, *Que la meſure de l'effort que doit faire le corps pour ſe retirer de la direction de toutes les tangentes finies qu'il tend à parcourir, en ſuppoſant que cet effort ſeroit employé à lui faire décrire*

un eſpace, eſt $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$. Pag. 120

II. PROPOSITION : *Qu'il eſt faux qu'un corps, peſant ſur ſon centre de peſanteur, puiſſe décrire autour de ce centre, par le mouvement angulaire du rayon vecteur, à l'extrémité duquel ce corps ſe trouveroit placé, aucune eſpece de courbes non fermées qui s'écarteroient à l'infini de leur axe, & en conſéquence que les forces centripètes que M. Newton aſſigne pour la génération de ces ſortes de courbes ſont nulles, fauſſes & chimériques.* 155

III. ET IV. PROP. 1°, *Que la loi d'une force centrale, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, eſt encore fauſſe dans le cas où le corps ſeroit ſuppoſé décrire une ellipſe par l'un de ſes foyers.*

2°, *Que c'eſt à la force de projection, & non point à la loi d'une attraction, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, que l'on doit attribuer l'augmentation, ou la diminution de force centrale qu'éprouve le corps, lorſque la direction de ſon mouvement par la tangente, & le rayon vecteur forment un angle moindre, ou plus grand qu'un angle droit.* 168

Application de la meſure $\sqrt{\frac{c^2}{2r}}$ *de la peſan-*

teur d'un corps qui décriroit un cercle, à la détermination des mouvemens de révolution & de rotation des corps du Syſtême planétaire. 183
Application du principe des orbites materielles à la détermination de la diſtance de la Terre au Soleil. 188
REMARQUE. 195
II. REMARQUE. 216
Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides 258
DÉMONSTRATION. Ibid.
REMARQUE. 259
Application du Théorême précédent, à la meſure des Surfaces & des Solides. 264
REMARQUE. 271
Obſervations ſur les propriétés ſpéciales des courbes rectifiables. 296
REMARQUE. 299
II. REMARQUE. 312
III. REMARQUE. 317
Obſervations ſur les propriétés ſpéciales des Courbes quarrables. 330
Obſervations ſur les points de différens ordres, par leſquels les lignes courbes peuvent être conçues formées, & ſur la maniere de les exprimer. 339
Obſervation ſur la maniere de déduire les propriétés des Sections coniques. 363

Observations sur la formule d'un binome a + b, *élevé à une puissance quelconque* m, *attribuée à M. Newton.* 378

Fin de la Table

ERRATA.

Page 14, lig. 18, $\frac{1}{\frac{D}{2}}$, liſez : $\frac{1}{\frac{D}{2}}$.

Page 16, lig. 10, $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$, liſez : $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$.

Page 49, lig. 6, $y = 2rx - x$, liſez : $y^2 = 2rx - x^2$.

Page 176, lig. 23, ajoutez (Fig. 23).

Page 264, lig. 2, $\frac{x^n \; m}{n+m}$, liſez : $\frac{x^{n+m}}{n+m}$.

Page 269, lig. 9, $a \overline{\frac{2m-2n}{m}}^{\frac{1}{2}} \; \frac{2n}{m}$, liſez : $a \overline{\frac{2m-2n}{m}}^{\frac{1}{2}} \times \frac{2n}{m}$.

Page 281, lig. 2, $ax + bx$, liſez : $ax + bx$.

Page 283, lig. 23, premier, ajoutez, cas.

Page 292, lig. 4, $nx^{n-1}dx$, liſez : $nax^{n-1}dx$.

Ibid. lig. 5, nax^{n+1}, liſez : nax^{n-1}.

Ibid. lig. 9, my^{m+1}, liſez : my^{m-1}.

Ibid. lig. 18, $nax^{n \; 1}$, liſez : nax^{n-1}.

Page 294, lig. 18, $1 \times \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a^2 - 6ax^2 + 4x^2}$, liſez : $1 \times \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a^2 - 6ax + 4x^2}$.

Page 295, lig. 3 (Fig. 37), liſez (Fig. 34).

Page 317, lig. 1, qui ne différeroient, liſez : qui differeroient.

Pag. 367, derniere lig. $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{+m+n}}$ liſez : $\sqrt{\frac{mn^2 + n^3}{\pm m + n}}$.

Page 368, lig. 9, $\frac{\frac{m}{0}}{\infty} = \frac{m}{1}$, liſez : $\frac{\frac{m}{0}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{m}{1}$.

APPROBATION.

J'AI lû, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, & approuvé un Manuſcrit qui a pour titre : *Elémens des Forces centrales, ou Obſervations ſur les Loix que ſuivent les Corps mûs autour de leur centre de peſanteur, ſuivies d'un jugement de l'Académie Royale des Sciences ſur pluſieurs de ces Obſervations, & d'un Examen critique de ce même jugement, à quoi on a joint un Théorême général & fondamental ſur la meſure des Surfaces & des Solides, & quelques Obſervations ſur la nature des Courbes quarrables & rectifiables.*

Les forces centrales ſont démontrées, dans cet Ouvrage, d'une maniere très-élégante; les grandes découvertes de Galilée, & d'Huighens s'y préſentent ſous la forme la plus ſimple, avec les ſeuls Elémens de la Géométrie ordinaire, & quelques propriétés des Sections coniques, que l'on peut auſſi regarder comme des Elémens, on peut entrer dans la lecture de cet Ouvrage, laquelle, avant le travail de l'Auteur, exigeoit un aſſez grand appareil de géométrie & de calcul.

Mais ce qui réveillera, ſans doute, l'attention des Phyſiciens Géomètres, c'eſt la conteſtation qui s'eſt élevée entre les Commiſſaires de l'Académie Royale des Sciences & l'Auteur, au ſujet des quatre Propoſitions qu'il a ſoumiſes au jugement de cette Académie. Conteſtation ſur laquelle il ne nous appartient point de prononcer; les par-

ties étant convenues de s'en rapporter au jugement du Public.

Ce ſera ſans doute un ſpectacle bien intéreſſant pour le grand monde des Mathématiciens, de voir entrer en lice, d'une part, un illuſtre deſcendant du fameux Comte de Forbin, Chef d'Eſcadre, qui meſura, avec tant de ſuccès, ſes forces & ſon habileté contre celles des Anglois, & de l'autre la Légion ſacrée, le corps formidable de l'Académie des Sciences, au ſujet du demi-Dieu de l'Angleterre, de l'immortel Newton. A la vérité, c'eſt ici une guerre de plume, d'argumens & de démonſtrations, où l'on ne verra point le ſang couler; mais un combat, ſans effuſion de ſang, pour la gloire de la plus noble portion de l'homme; une victoire qui donnera la plus haute conſidération, à l'un des deux partis ſans détruire l'eſpece humaine, ne ſont-ils pas fort préférables à ces carnages, à ces boucheries, dont l'hiſtoire fait horreur; maſſacres, qui n'aboutiſſent ſouvent qu'à une petite augmentation de territoire, avec quoi l'eſtomach du vainqueur ne digère pas mieux, & ne prend pas un morceau de plus.

Nous ne pouvons donc qu'applaudir aux vues de l'Auteur, M. le Chevalier de Forbin; il ne s'eſt pas contenté de ſervir ſa Patrie avec diſtinction dans la carrière des armes; mais, épris de la vraie grandeur de l'homme, il cherche encore, pendant la paix, à porter la lumière dans les eſprits, ſans commettre aucunement ni la ſûreté, ni la tranquillité des corps. A Paris, ce 9 Juin 1773.

L'abbé DE LA CHAPELLE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conſeillers les gens tenans nos Cours de Parlement & Conſeils Supérieurs, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le Chevalier de FORBIN, Nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & donner au Public, *Elémens des Forces centrales, ou Obſervations ſur les Loix que ſuivent les corps mûs autour de leur centre de peſanteur, de ſa compoſition.* s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de ſix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes : Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun extrait ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts ; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril mil ſept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du préſent Privilége ;

qu'avant de l'expoſer en vente, le manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier, Garde des Sceaux de France, le Sieur DE MAUPEOU ; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit ſieur DE MAUPEOU ; le tout à peine de nullité des Préſentes; du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayant cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris, le vingt-troiſieme jour du mois de Février l'an de grace mil ſept cent ſoixante-quatorze, & de notre Régne le cinquante-neuvieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

LE BEGUE.

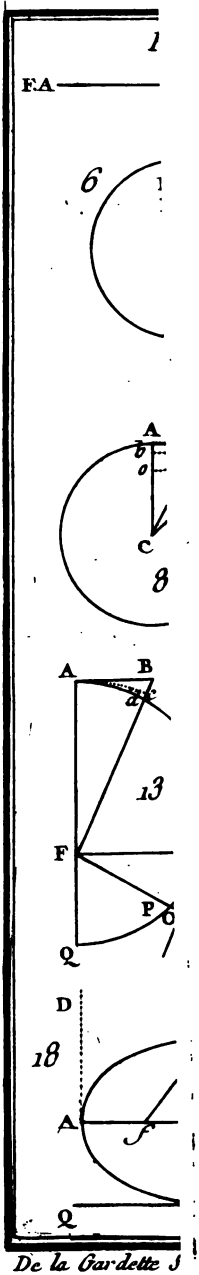
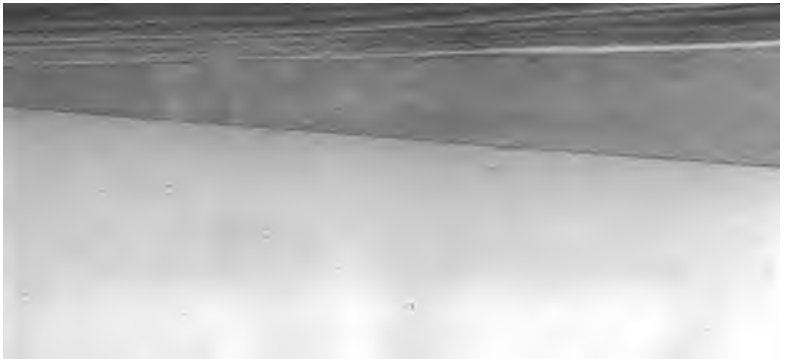
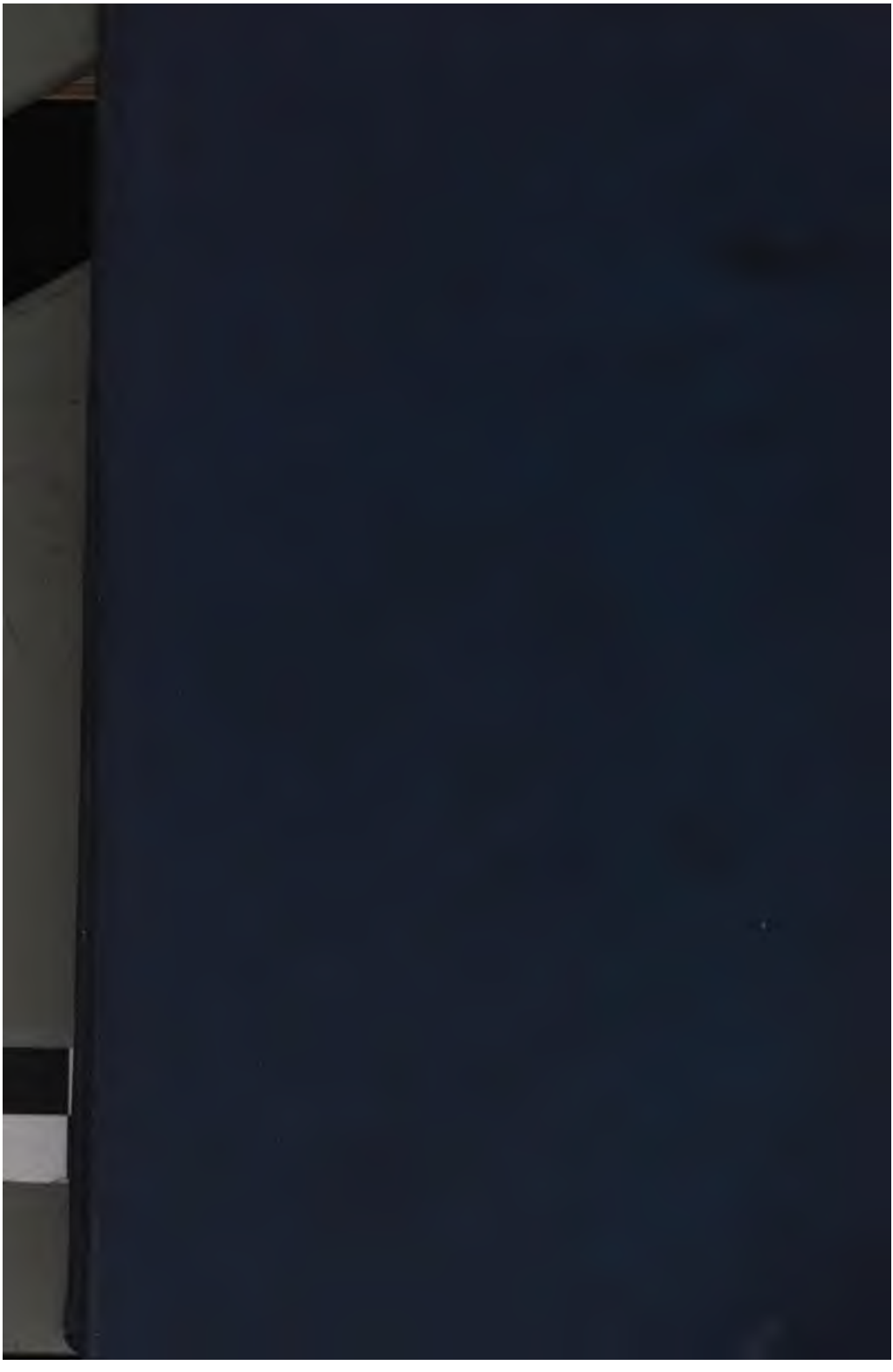
Regiſtré le préſent Privilége & enſemble la ceſſion ſur le Regiſtre XIX de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 1951. *infol.* 224. *conformément au Réglement de* 1723. *A Paris, ce* 22 *Mars* 1774.

C. A. JOMBERT pere, *Syndic.*

Je céde & tranſporte le préſent Privilége à Madame Veuve Deſaint, pour en jouir elle & ſes ayants cauſes, comme de choſe à elle appartenante, ſuivant les conventions faites entre nous. A Paris, le 11 *Mars* 1774.

Le Chevalier de FORBIN.

De l'Imprimerie de L. F. DELATOUR, 1774.



De la Gardette f